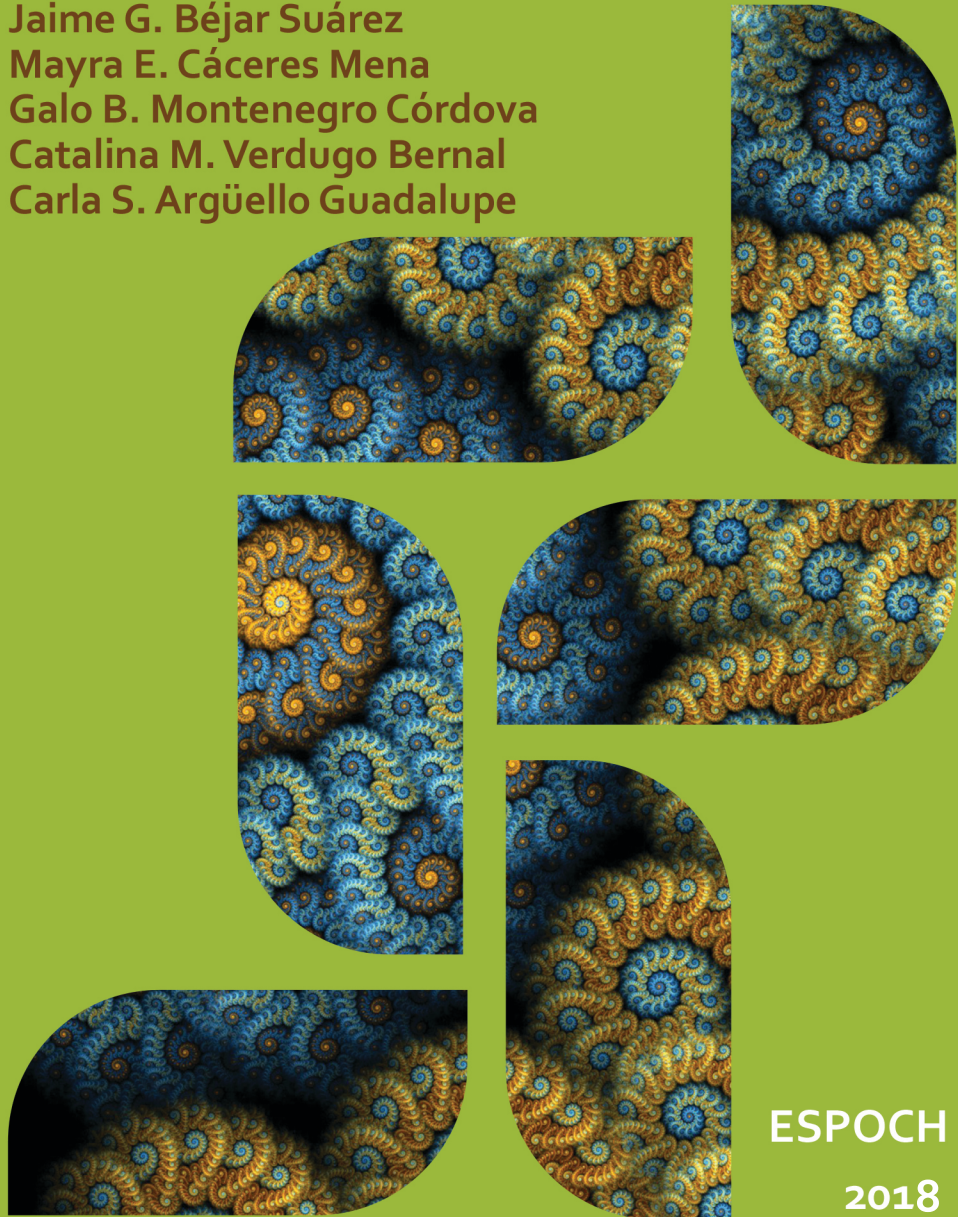


Geometría fractal

Jaime G. Béjar Suárez
Mayra E. Cáceres Mena
Galo B. Montenegro Córdova
Catalina M. Verdugo Bernal
Carla S. Argüello Guadalupe



ESPOCH
2018

GEOMETRÍA FRACTAL

GEOMETRÍA FRACTAL

Jaime G. Béjar Suárez
Mayra E. Cáceres Mena
Galo B. Montenegro Córdova
Catalina M. Verdugo Bernal
Carla S. Argüello Guadalupe



DIRECCIÓN DE
PUBLICACIONES



GEOMETRÍA FRACTAL

© 2018 Jaime Giovanni Béjar Suárez, Mayra Elizabeth Cáceres Mena, Galo Briam Montenegro Córdova, Catalina Margarita Verdugo Bernal y Carla Sofia Arguello Guadalupe.

© 2018 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (3) 2 998200
Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*).

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa autorización por escrito de los propietarios del Copyright.

CDU: 514.1 Geometría Fractal
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Dirección de Publicaciones, año 2018
85 pp. vol: 17 x 24 cm
ISBN: 978-9942-35-511-9
1. Geometría
2. Fundamentos de la geometría
3. Geometría fractal

CONTENIDO GENERAL

1. INTRODUCCIÓN A LOS FRACTALES.....	14
2. DIMENSIÓN Y MEDIDA DE HAUSDORFF	23
2.1. Introducción	23
2.1.1. El mapeo no-continuo invertible de Cantor (1872)	23
2.1.2 El mapeo continuo no-invertible de Peano (1890).....	24
2.2. Dimensión topológica	25
2.3. Los recubrimientos de un conjunto	26
2.3.1. Los recubrimientos de Cantor – Minkowski.....	26
2.3.2 Los δ -recubrimientos.....	28
2.4. Medida de Hausdorff	29
2.4.1 Propiedades de la medida de Hausdorff.....	31
2.4.2. Propiedades de la medida s -dimensional de Hausdorff.....	32
2.5. Dimensiones de Hausdorff y fractal	32
2.5.1. Propiedades de la dimensión de Hausdorff.....	35
2.5.2. Dimensión de conteo de cajas como una aproximación a la dimensión de Hausdorff	36
3. CONJUNTOS FRACTALES.....	41
3.1. Introducción	41
3.2. Definición de fractal	41
3.3. Propiedades de los fractales.....	42
3.3.1. Intersección de fractales.....	42
3.3.1.2 Proyección de fractales.....	45
3.3.2 Producto de fractales: adición de dimensiones.....	47
3.4. Similitud y homotecia.....	47
3.4.1. Dimensión de similaridad.....	48
3.5. La curva triádica de Koch.....	52
3.6. El conjunto triádico de Cantor.	55

4. TEORÍA MULTIFRACTAL.....	58
4.1. Introducción.....	58
4.2. Medidas multifractale.....	58
4.3. El proceso de compactación.....	58
4.4. El proceso multiplicativo binomial.....	61
4.5. Subconjuntos fractales.....	63
4.6. El exponente de Lipschitz – Hölder, α	66
4.7. Propiedades de la curva $f(\alpha)$	69
5. COMPORTAMIENTO MULTIFRACTAL DE MANCHAS VISCOSAS EN MEDIOS POROSOS.....	72
5.1. Teoría de las manchas viscosas.....	72
5.2. El conjunto fractal de las zonas en crecimiento.....	76
5.3. La curva $f(\alpha)$	77
BIBLIOGRAFÍA.....	80
ÍNDICE ALFABÉTICO.....	84
SIMBOLOGÍA.....	85

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1 Ramas de un árbol.....	16
Fig. 1.2 Brócoli romanesco.....	17
Fig. 1.3 Hoja de helecho.....	17
Fig. 1.4 Redes neuronales.....	18
Fig. 1.5 Redes broquiales.....	18
Fig. 1.6 Patrón de textura creado con computadora.....	19
Fig. 1.7 Flor verde construida con computadora.....	19
Fig. 1.8 Ruinas construidas con computadora.....	20
Fig. 1.9 Construcción del triángulo de Sierpinski.....	20
Fig. 1.10 Construcción de la alfombra de Sierpinski.....	21
Fig. 1.11. Conjunto de Mandelbrot.....	22
Fig. 2.1 Mapeo de cuadrado unitario.....	24
Fig. 2.2 Vista frontal de un recubrimiento de Cantor-Minkowski a un cubo, donde el recubrimiento es total para $\delta \rightarrow 0$	28
Fig. 2.3 $Hs(A)$ vs. s salta de ∞ a 0 en correspondencia con el valor crítico de s	34
Fig. 2.4 El gráfico de $\ln N(\delta)$ vs. $\ln \delta$, es una recta con pendiente $-D$	40
Fig. 3.1 Formación de cristales detríticos.....	42
Fig. 3.2 Proyección de una nube.....	46

Fig. 3.3 Cuadrado de lado 1.....	50
Fig. 3.4 Reducción del conjunto A por un factor λ	51
Fig. 3.5 Construcción de la curva triádica de Koch.....	53
Fig. 3.6 Construcción del conjunto Triádico de Cantor.....	55
Fig. 3.7 Construcción de una barra de Cantor con dos factores de escala y con $l = 1/4$ y $l = 2/5$. La dimensión fractal de este conjunto de Cantor es $D = 0.6110$	57
Fig. 4.1 La barra triádica de Cantor.....	59
Fig. 4.2 La masa de la barra triádica de Cantor como función de la posición a lo largo del intervalo $[0,1]$	61
Fig. 4.3 Espectro multifractal $f(\xi)$ para los subconjuntos, generados por un proceso multiplicativo binomial con $p = 0.25$	66
Fig. 4.4 Espectro multifractal $f(\alpha)$ para los subconjuntos S_α como una función del exponente de Lipschitz – Holder α	69
Fig. 5.1 La celda Hele-Shaw.....	72
Fig. 5.2 Manchas de aire (en negro) desplazando el líquido epóxido en un medio poroso bi-dimensional consistente de esferas de vidrio de 1.6 mm en una mono-capa entre dos láminas de vidrio de 40 cm de diámetro. El centro de la inyección está cerca del centro de la estructura. a) $t = 2$ s después del inicio de la inyección. b) $t = 3.9$ s. c) 19.1 s (Maloy et al., 1987).....	74

PRÓLOGO

Se tienen evidencias que muchos fenómenos químicos, físicos y biológicos presentes en la naturaleza, así como algunas formas geométricas encontradas en la naturaleza siguen un comportamiento fractal; por lo tanto, es conveniente el estudio de estos fenómenos desde un enfoque matemático diferente a lo habitual a fin de dar explicaciones razonables a varios procesos naturales y a observaciones experimentales. Pero, esto debe iniciarse desde los conceptos básicos hasta llegar a construir un conjunto de conocimientos matemáticos sistémicos que logren dar explicaciones científicas a los hechos, sin tampoco descartar que puedan existir otras posibles explicaciones científicas a los mismos.

AGRADECIMIENTO Y CONTRIBUCIONES

Un agradecimiento profundo a las autoridades de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), por el apoyo constante para que la ESPOCH se convierta en una politécnica que oferte docencia con investigación.

A cada una de las personas que muy generosamente colaboraron para la revisión intelectual de este libro, por el incondicional apoyo y guía, esenciales para culminar esta tarea.

DEDICATORIA

A mi esposa
mis hijos
mis padres
amigos y estudiantes.

Jaime Giovanni Béjar Suárez es investigador y profesor en la Facultad de Ciencias de la ESPOCH. Se formó a nivel de pregrado en la carrera de Doctorado en Química, especialidad Físico Química. Ha realizado varias publicaciones relacionadas a la teoría del caos y a los fractales. Consiguió con su propuesta de investigación *Datos Electrocardiográficos Mediante la Teoría del Caos* ser reconocido por Fundacyt dentro de los mejores proyectos de investigación del Ecuador por lo que recibió apoyo del BID para su ejecución. Parte de su fundamento teórico de este proyecto es presentado en la presente obra.

Mayra Elizabeth Cáceres Mena es Doctora en Matemática y Magister en Matemática. Docente - investigadora de la Facultad de Recursos Naturales de la ESPOCH. Con 15 años de experiencia profesional, autora de varios artículos en revistas científicas de alto impacto y de varios libros de Matemática. Sus estudios se han enfocado a la geometría fractal o geometría de la naturaleza, por cuanto se ha demostrado que muchos fenómenos químicos, físicos y biológicos siguen un comportamiento multifractal. Actualmente la Dra. Mayra Cáceres Mena estudia desde un punto de vista geométrico, la teoría necesaria para afrontar el análisis de datos multifractales, cuyo aporte es presentado en la siguiente obra.

Galo Briam Montenegro Córdova es Jefe del Laboratorio de Química, Coordinador del grupo de investigación de Química Agrícola de la Facultad de Recursos Naturales de la ESPOCH.

Trabaja en síntesis de compuestos heterocíclicos derivados del 2,3 y 4 azafluorenos en la posición 9. Participa en la Red de Ciencias Forestales del Ecuador. Una poderosa herramienta matemática que permite caracterizar objetos complejos, es el análisis multifractal; en nuestro trabajo la aplicamos al problema de manchas viscosas que se producen en medios porosos, desde el punto de vista geométrico. También se puede medir la dimensión fractal de los árboles de un bosque.

Catalina Margarita Verdugo Bernal es ingeniera en Ecoturismo, Magister en Diseño, Gestión y Dirección de Proyectos, Magister en Turismo Sostenible y Desarrollo local, Especialista Superior en Gestión Ambiental, experiencia profesional de más de 8 años en el sector público, privado y comunitario, facilitadora en proyectos financieros y sociales en las provincias de Cañar, Cotopaxi, Imbabura, Chimborazo y Amazonía ecuatoriana. Ha publicado 15 artículos en diversos temas de sostenibilidad y académicos. La experiencia en el manejo de análisis

económicos y financieros ha demostrado la necesidad del contingente numérico dentro de espacios naturales en busca del manejo responsable del ambiente, por ello ha complementado el enfoque integral de análisis de datos multifractales aplicado a las diferentes formas que la naturaleza expresa y son evidenciadas de forma exacta a través de estas ciencias.

Carla Sofía Arguello Guadalupe es ingeniera en Ecoturismo, Msc. en Economía Agraria, especialización recursos naturales y medio ambiente, con Diplomado Superior en Docencia con el Empleo de las TIC, experiencia profesional de más de 10 años en el sector público, privado y comunitario, asesora en emprendimientos agrícolas en comunidades de Chimborazo. Ha publicado 10 artículos en diversos temas tanto económicos como académicos. La experiencia en el manejo de la economía ha evidenciado la necesidad básica de un buen cimiento en la matemática en sus diferentes áreas y una de ellas es la geometría fractal, donde a través del análisis económico de funciones de demanda y oferta se identifican formas geométricas que permiten calcular excedentes del consumidor y del productor y que finalmente son determinados en valores que asumen los consumidores en el mercado.

INTRODUCCIÓN

Se sabe que la geometría euclidiana es importante en varias ciencias e ingenierías, donde se tratan con cuerpos o figuras regulares; sin embargo, hay que reconocer también que es una abstracción simplificada de la realidad. Por ejemplo, el determinar la longitud de la costa de un país, particularmente de los que muestran muchas “irregularidades” como Noruega o Reino Unido se convierte en un serio problema desde el punto de vista de la geometría euclidiana a menos que se hagan importantes simplificaciones. Estas situaciones nos enfrentan a objetos reales que pertenecen a una realidad más compleja. Es así como surgen los fractales.

En este libro se describen de manera organizada y de manera didáctica a los fractales, cuyo estudio se remonta a la década de los 70. Así, en esta obra se expone partiendo desde los conceptos más básicos, de sus definiciones y varios ejemplos ilustrativos hasta llegar a utilizarlos en conjuntos irregulares más complejos; de modo que puedan estar al alcance de estudiantes de pregrado, particularmente de aquellos que estudian carreras como matemática.

A medida que se avance en el estudio de los temas tratados se observará que los conocimientos se van abordando gradualmente hasta conformar un conjunto de conocimientos sustentados en razonamientos y demostraciones relacionadas con los fractales hasta llegar a dar explicaciones razonables del comportamiento multifractal encontrado en algunos fenómenos como son las manchas viscosas que se forman en el desplazamiento de un fluido en un medio poroso con alta viscosidad debido a otro fluido con baja viscosidad.

Desde luego, la mayoría de los conocimientos presentados en esta obra han sido el resultado de organizar sistemáticamente resultados de varios investigadores durante años anteriores; por ejemplo, la aplicación de los multifractales a la turbulencia fue desarrollada por Frisch, Afonso, Mazzino y Yakhot (2008), y Benzi, Paladin, Parisi y Vulpiani (1984); quienes demostraron que los resultados experimentales dan una mayor concordancia entre las observaciones experimentales y las de un simple modelo teórico.

Esencialmente, para proceder a desarrollar la presente obra se recurre, en cuanto a la forma de razonar, la utilización del método inductivo; y en cuanto a la coordinación del contenido, se plantea que la información disponible obedezca a una estructura de hechos que va desde lo menos a lo más complejo o desde el origen a la actualidad; es decir empleando un esquema lógico.

1. INTRODUCCIÓN A LOS FRACTALES

Richard Bentley:

“...no hemos de creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas no son exactamente como conos o pirámides, ni las estrellas están situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme..”

La Matemática tradicional trata con “lo regular”, ¿pero qué ocurre con todo lo irregular que encontramos en la naturaleza? Mandelbrot, a mediados del siglo XX, usa la geometría fractal para describir y modelizar los objetos irregulares de la naturaleza (Mandelbrot B. B., 1983).

Según Benoit Mandelbrot “Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta, (...) La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad”, por lo expuesto anteriormente, había la necesidad de utilizar la geometría fractal para analizar estos objetos irregulares (Talanker, 2011).

El término fue tomado del adjetivo latino *fractus* que significa interrumpido o irregular utilizado para describir objetos (reales y abstractos) considerados “irregulares” por la geometría tradicional. La mayoría de las formas que nos rodean en la naturaleza tiene una forma fractal, donde existe un caos y un orden. Algunos ejemplos de ello son: los perfiles costaneros, la hoja de un helecho, los paisajes, la superficie rugosa de una roca, el ramaje de un arbusto, la ramificación alveolar en los pulmones, la frontera de una nube, las fluctuaciones de precios en un mercado, la dinámica de crecimiento poblacional de las bacterias, las trayectorias que Mandelbrot llamó fractales de las partículas de polvo suspendidas en el aire y del movimiento de un grano de polen soltado en un vaso de agua (Talanker, 2011).

La geometría fractal, en la actualidad, es muy utilizada en la física, medicina, computación, química, biología, economía, fisiología, lingüística y el arte, ya que ha permitido reformular y resolver problemas complejos de una forma muy simplificada (Alfaro A., Murillo T., & Soto A., 2010).

Los fractales ayudan en el análisis de fenómenos tales como la turbulencia, el comportamiento de las manchas viscosas que ocurren en el desplazamiento de un

fluido de un medio poroso con alta viscosidad, debido a otro fluido con baja viscosidad, bolsa de valores, dispersión del humo, en los depósitos y agregados electroquímicos, en todo flujo turbulento, etc. (Alfaro A., Murillo T., & Soto A., 2010).

La geometría clásica o euclídeana, con sus figuras, no es la más apropiada para generar las formas más complicadas que se muestran en la naturaleza como la hoja de un helecho o el perfil de una montaña. debido a que al ser ampliadas pierden su estructura; por ejemplo, el arco de un círculo se transforma en una recta, la superficie de una esfera se vuelve cada vez más plana. Lo que no sucede con las formas naturales; por ejemplo, una superficie rugosa mantendrá su mismo esquema si amplificamos el microscopio con el cual le observamos, es decir, mantiene su forma original, aunque se le cambie de escala (Talanker, 2011).

Similarmente que, con la superficie rugosa, en el ramaje de un arbusto de una rama salen muchas ramas y en cada una de ellas se repite el mismo esquema (Talanker, 2011).

Según Alfaro, Murillo y Soto (2010): “Los fractales son figuras geométricas que se caracterizan por su semejanza, son estructuras infinitas que se pueden dividir cuantas veces se desee y mantendrá la misma estructura” [p.III].

Mandelbrot (1975) fue el primer científico que utilizó el término fractales, y manifestó lo siguiente “*Los Fractales* (del latín fractus que significa, irregular, quebradizo) es el conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional. Los fractales son resultado de la repetición al infinito de los patrones geométricos que se superpone de forma indefinida” (Moreles Vázquez, 2003)

Un ejemplo sencillo de fractales es la ramificación de un árbol: del tronco salen las ramas, de estas ramas crecen otras ramas más pequeñas, de estas ramitas salen ramas más pequeñas con detalles que se repiten hasta las ramitas más y más pequeñas. El brócoli romanesco presenta porciones pequeñas similares a otras más grandes y estas, a su vez, similares a porciones aún mayores, y así sucesivamente; es decir, tiene una estructura autosimilar¹. Podemos concluir que las figuras fractales se obtienen al repetir una y otra vez el mismo procedimiento

¹ Un objeto es autosimilar si se cambia la escala tantas veces como se desee y se sigue obteniendo una figura similar a las anteriores.

(Talanker, 2011). Otros fractales los observamos en: hojas, montañas y flores (ver Figs. 1, 2 y 3).



Figura 1.1. Ramas de un árbol.

Fuente: Fotografía realizada por José María Sorando Muzás



Figura 1.2. Brócoli romanesco.

Fuente: <https://pixabay.com/es/romanesco-romanesco-verdura-3297134/>



Figura 1.3. Hoja de helecho.

Fuente: <https://pixabay.com/es/de-la-hoja-flora-naturaleza-3359256/>

GEOMETRÍA FRACTAL

Según Goldberger (1990) otras estructuras fractales las encontramos en aparatos y sistemas de los seres vivos como las redes neuronales, los vasos capilares, tubos intestinales, biliares y bronquiales, etc. (Talanker, 2011) (ver Figs. 1.4 a 1.5).



Figura 1.4. Redes neuronales.

Fuente: <https://pixabay.com/es/c%C3%A9lula-del-nervio-neurona-cerebro-2213009/>

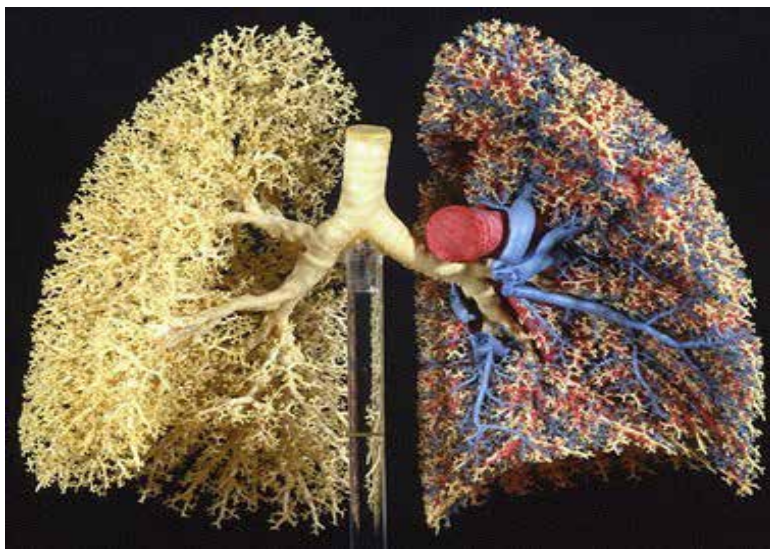


Figura 1.5. Redes bronquiales.

Fuente: http://www.elartedelaestrategia.com/fractal_fractales_en_la_naturaleza.html

Los ordenadores, con su potencia de cálculo, han contribuido en los últimos años considerablemente al progreso de los fractales, a través de los procesos iterativos infinitos que son utilizados para crear representaciones gráficas cada vez más precisas (Barnsley, 2014). Actualmente existen muchos programas informáticos que son utilizados para generar todo tipo de imágenes fractales: paisajes, nubes, árboles, texturas, animales, etc. (ver Figs. 1.6 a 1.8) (Mandelbrot B. B., 1983)



Figura 1.6. Patrón de textura creado con computadora.

Fuente: <https://pixabay.com/es/la-red-matem%C3%A1ticas-geometr%C3%ADa-dise%C3%B1o-871475/>

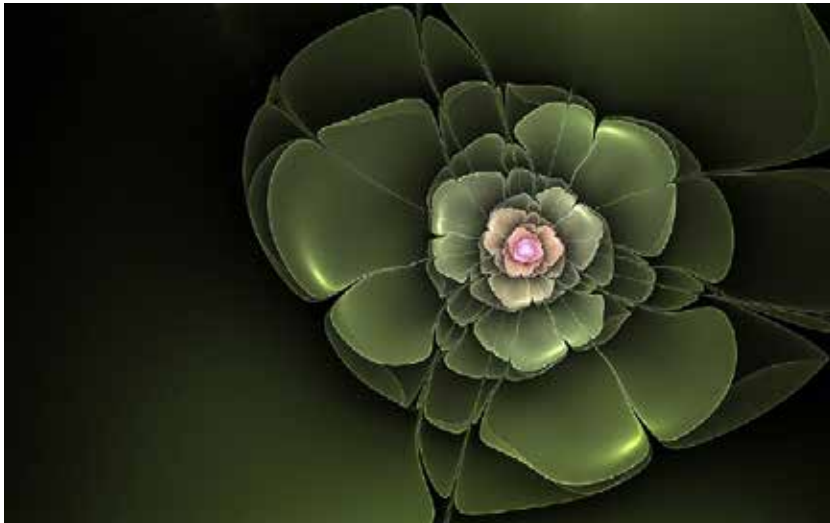


Figura 1.7. Flor verde construida con computadora.

Fuente: <https://pixabay.com/es/fractal-flor-verde-fantas%C3%ADa-1987980/>



Figura 1.8. Ruinas construidas con computadora.

Fuente: <https://pixabay.com/es/la-construcci%C3%B3n-de-ruinas-antigua-1647925/>

Para entender mejor el proceso de generación de fractales mediante programas informáticos expliquemos rápidamente su parte conceptual; por ejemplo, para construir el triángulo de Sierpinski se parte de un triángulo llamado iniciador, se unen los puntos medios de sus tres lados y se elimina el triángulo del central; en los tres restantes triángulos se aplica nuevamente el procedimiento. Este proceso geométrico se lo reitera hasta el infinito, el conjunto que finalmente obtenemos es el llamado triángulo de Sierpinski (ver Fig. 1.9).

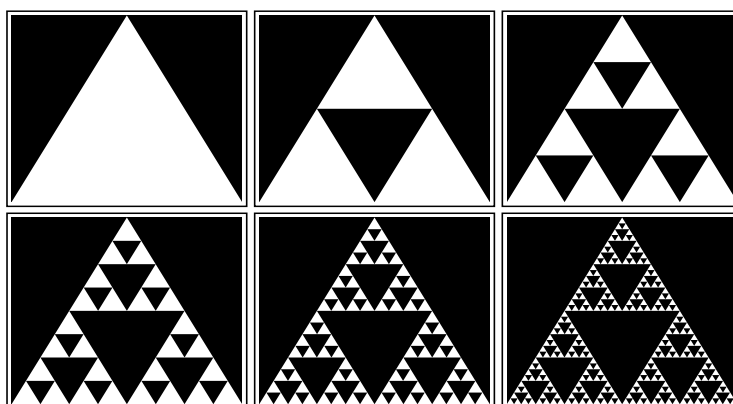


Figura 1.9. Construcción del triángulo de Sierpinski.

Fuente: <https://topologia.wordpress.com/2008/12/19/el-conjunto-de-cantor-y-el-triangulo-de-sierpinski/>

Si en vez de triángulos, usamos cuadrados o cubos, obtenemos la alfombra de Sierpinski, con la peculiaridad de que el área del cuadrado (o volumen en el caso del cubo) es cero. (véase la Fig. 1.10)

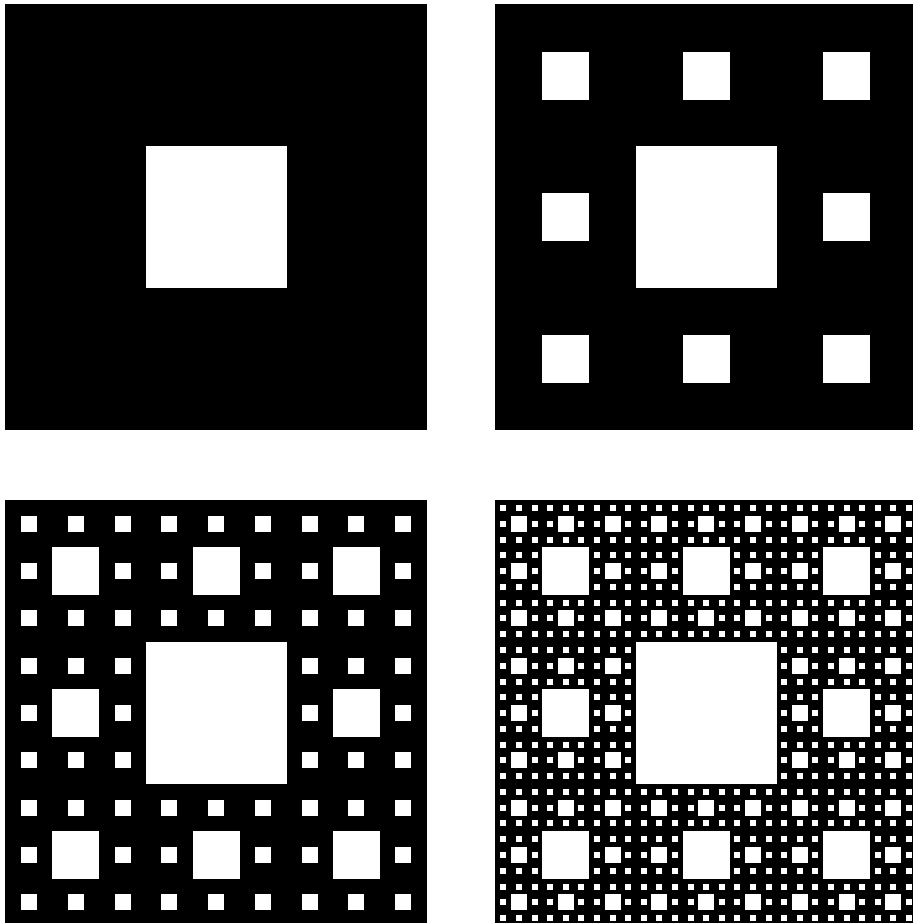


Figura 1.10. Construcción de la alfombra de Sierpinski.

Fuente: <https://fractalescio.wordpress.com/2014/11/14/alfombra-de-sierpinski/>

El conjunto de Mandelbrot es otro famoso fractal en el cual se pueden apreciar dos características fundamentales de los fractales: la frontera de esta curva es muy irregular y además la propiedad de autosemejanza, es decir, miles de réplicas del fractal a menor escala (ver Fig. 1.11).

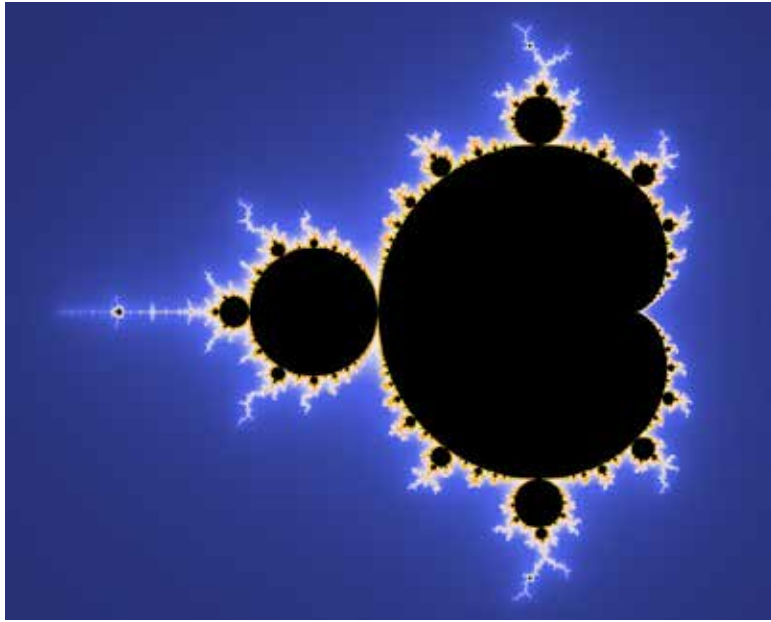


Figura 1.11. Conjunto de Mandelbrot
Fuente: (Mandelbrot B. B., 1983)

En capítulos posteriores se presentan otros conjuntos fractales creados mediante procesos repetitivos y se expone de manera más formal el sustento matemático de los conjuntos fractales.

2. DIMENSIÓN Y MEDIDA DE HAUSDORFF

2.1 Introducción

Antes de que se estableciera la teoría de los conjuntos (alrededor de 1870), la idea de dimensión era vaga y se basaba esencialmente en la definición intuitiva dada por Euclides (\approx 300 a. C.):

- Un punto es aquel que no tiene partes.
- Una línea es una longitud sin espesor.
- Las extremidades de una línea son puntos.
- Una superficie es aquella que tiene solamente longitud y ancho.
- Los extremos de una superficie son líneas.

Posteriormente se definió la dimensión de un conjunto como el número de parámetros necesarios para especificar la posición de sus puntos en el espacio. Esta definición evolucionó rápidamente gracias a los trabajos de Cantor (Guzmán, 2006) y Peano (Bernal González, Calderón Moreno, & Prado Bassas, 2015) quien es demostraron inadecuada tal noción, mediante la construcción de dos mapeos entre subconjuntos de espacios euclidianos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} :²

- Un mapeo no-continuo invertible de Cantor (1872)
- Un mapeo continuo no-invertible de Peano (1890)

2.1.1. El mapeo no-continuo invertible de Cantor (1872)

Cantor encontró un mapeo invertible del cuadrado unitario $[0, 1] \otimes [0, 1]$ en el intervalo unitario $[0, 1]$, usando un mapeo 1 a 1, como se muestra en la Fig. 2.1.

² Un objeto es autosimilar si se cambia la escala tantas veces como se desee y se sigue obteniendo una figura.

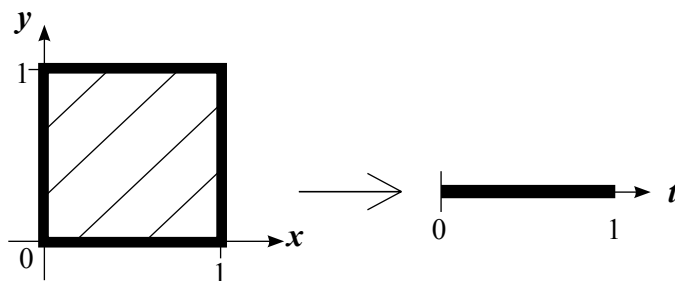


Figura 2.1. Mapeo de cuadrado unitario.

El procedimiento consiste en tomar cada punto (x, y) del cuadrado y hacerle corresponder un punto t en el intervalo unitario, para ello las coordenadas x y y se expresan en binario, es decir, $x = 0. n_0 n_2 n_4 n_6 \dots$, $y = 0. n_1 n_3 n_5 n_7 \dots$ donde los n_i son todos ceros o unos. El punto (x, y) es mapeado al punto t en el intervalo con única coordenada $t = 0. n_0 n_1 n_2 n_3 n_4 \dots$

Aunque este mapeo es 1 a 1 está lejos de ser continuo (pues no se cumple que la imagen inversa de cada entorno de t_0 es un entorno de (x_0, y_0)).

Este mapeo demuestra que un cuadrado no puede ser considerado “bidimensional” simplemente porque se usen dos coordenadas. (¡Una es suficiente!). Sin embargo, aún se esperaría que la definición en base al número de parámetros sea usable si se excluyeran las transformaciones no continuas.

No obstante, esta restricción no es suficiente, como lo demostró Peano (Bernal González, Calderón Moreno, & Prado Bassas, 2015).

2.1.2. El mapeo continuo no-invertible de Peano (1890)

Simplemente indicaremos que Peano (1890) usó un mapeo continuo no-invertible del intervalo unitario $[0, 1]$ en el cuadrado unitario $[0, 1] \otimes [0, 1]$, el mismo que demostró ser continuo, sin embargo, no es 1 a 1 (es decir no es invertible, a pesar de ser sobreyectivo³) (Cardona & Múnera, 2016).

El resultado final es que los mapeos de Cantor y Peano de un conjunto, no son invariantes⁴ bajo transformación no-continua 1 a 1 o bien una transformación continua no 1 a 1.

³ El mapeo $: F: S \rightarrow S'$ es sobre cuando el conjunto de imágenes de F coincide con S' .

⁴ Un mapeo es invariante si la imagen no cambia al aplicarle un conjunto de transformaciones.

Estos resultados condujeron a una crisis de la definición de dimensión y a una reconstrucción de una parte importante de la matemática.

2.2 Dimensión topológica

Los resultados precedentes llevan a la siguiente pregunta de Hurwitz. ¿Es posible establecer una correspondencia entre el espacio euclidiano n -dimensional y el espacio euclidiano m -dimensional⁵, que contiene tanto las características de las construcciones de Cantor y Peano; es decir, con una correspondencia que sea 1 a 1 y continua? (Juventeny, 2016)

La respuesta está dada por el teorema de Lebesgue. A más de ello, la dimensión Euclidiana ha sido reemplazada por la dimensión topológica que en esencia es similar pero más precisa:

Teorema de Lebesgue: La dimensión topológica es invariante bajo transformaciones 1 a 1 y continuas (Petraakis, 2010). Este teorema abrió el camino para el desarrollo de la teoría de la medida.

Mientras que la definición moderna de dimensión topológica de Menger (Johnson, 2002) establece que:

Definición 2.1

El conjunto vacío (\emptyset) tiene dimensión topológica -1.

La dimensión topológica de un conjunto es el mínimo entero n para el cual cada punto tiene un entorno⁶ arbitrariamente pequeño cuya frontera⁸ tiene dimensión inferior a n .

⁵ El espacio $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / \forall i, i = 1, \dots, n, x_i \in \mathbb{R}\}$ (donde $n = 1, 2, \dots$) con las operaciones de adición de vectores, multiplicación por escalar y producto interno se conoce como el espacio euclidiano n -dimensional.

⁶ Un entorno de p es un conjunto V que contiene un abierto U ; si este tiene como elemento el punto $y \in \subseteq$.

⁸ La frontera de un subconjunto S de un espacio topológico es la intersección de la clausura de S con la clausura del complemento de S .

Ejemplos:

1. Un punto está rodeado solamente por el \emptyset , entonces la dimensión de la frontera del entorno es -1, luego $n = 0$.
2. Una línea está rodeada solo por el vacío y puntos, entonces $n = 1$
3. Un plano está rodeado solamente por el \emptyset , puntos y líneas, U entonces $n = 2$

Nota: en la actualidad existen varias definiciones de dimensión, las que han conducido a que la idea de dimensión pierda el propio carácter intuitivo y se convierta en un concepto matemático abstracto que puede conducir a resultados inesperados e interesantes como es el apareamiento de dimensiones fraccionarias. Cada una de tales definiciones puede resultar útil para determinados objetivos, pero no para otros; así, por ejemplo, la definición de dimensión topológica es de escasa utilidad cuando se trata del tamaño de un conjunto, ya que esta no hace referencia al tamaño. Como se verá en este capítulo, el tamaño de un conjunto fractal se evalúa de manera precisa mediante la familia de medidas de Hausdorff $\{H^t : t \geq 0\}$ (Rey Simó, 1995).

2.3. Los recubrimientos de un conjunto

2.3.1 Los recubrimientos de Cantor – Minkowski

Definición 2.2

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $n = 1, 2, 3$ a distancia d entre estos elementos se define:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (2.1)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Definición 2.3

Para todo $\delta > 0$, un recubrimiento de Cantor-Minkowski de $S \subset \mathbb{R}^n$ (espacio Euclidiano n -dimensional, donde $n = 1, 2, 3, \dots$) es un conjunto de bolas n -dimensionales $\mathcal{B}_\delta(x_\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^n / d(x_\alpha, y) \leq \delta\}$ centradas en cada punto x_α de S .

Note que por definición $S \subseteq \bigcup_\alpha \mathcal{B}_\delta(x_\alpha)$

La unión de los elementos del recubrimiento de Cantor - Minkowski define el conjunto $S(\delta) = \bigcup_\alpha \mathcal{B}_\delta(x_\alpha)$, el cual es llamado conjunto suave que satisface el siguiente límite:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S(\delta) = S \quad (2.2)$$

Es decir, en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ el conjunto $S(\delta)$ coincide con S .

Así, por ejemplo, para encontrar la medida (volumen) de un cubo S se pueden seleccionar esferas \mathcal{B}_δ centradas en cada punto del cubo y tomando un $\delta > 0$ prefijado lo suficientemente pequeño se encontraría que el volumen de S sería aproximadamente el volumen de $S(\delta)$ (Véase Fig. 2.2).

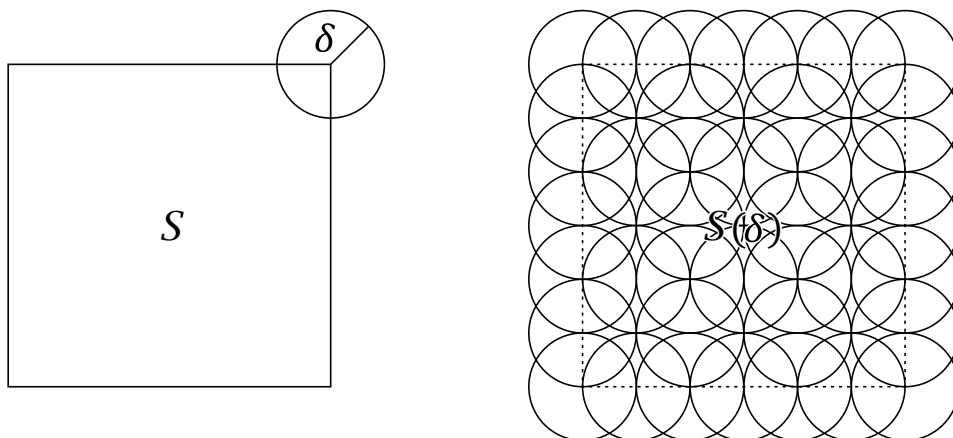


Figura 2.2. Vista frontal de un recubrimiento de Cantor-Minkowski a un cubo, donde el recubrimiento es total para $\delta \rightarrow 0$.

Por supuesto, las regiones no cubiertas en la Fig. 2.2 por las esferas B centradas en cada punto del cubo tienden a cero para $\delta \rightarrow 0$; esto es, en concordancia con el límite dado por la expresión (2.2).

2.3.2. Los δ - recubrimientos

Definición 2.4

Llamamos δ -recubrimiento de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (donde $n= 1,2,3, \dots$) a una colección numerable⁹ (o finita) de conjuntos $B_i, i= 1,2,3, \dots$ de diámetro a lo más δ^{10} ; que cubre A ; es decir,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

⁹ Un conjunto S es numerable o contable si se puede establecer una correspondencia 1 a 1 con un subconjunto de los naturales.

¹⁰ Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ se define el diámetro del conjunto A denotado como $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) / x, y \in A\}$

2.4 Medida de Hausdorff

En virtud del enfoque y de la temática del presente trabajo resulta útil introducir el uso de medida y dimensión de Hausdorff que, en cierta forma, da una manera de cuantificar la porción “ocupada” por un conjunto, así como de su grado de irregularidad, por ello comencemos dando las siguientes definiciones: (Juventeny, 2016), (Alegría, 2018) y (Montero Pascual, 2003).

Definición 2.5

Por una medida¹¹, en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) —con \mathcal{A} álgebra o anillo—, entenderemos una función no negativa

$$\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$$

que satisface:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) Es numerablemente aditiva, es decir, si dados $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ disjuntos —es decir tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ — y cuya unión esté en \mathcal{A} (esto es automático si \mathcal{A} es σ -álgebra), entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Si la condición (b) solo es válida para colecciones finitas de conjuntos disjuntos, A_1, \dots, A_n , diremos que la medida es aditiva. Diremos que una medida μ es σ -finita si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos $A_n \in \mathcal{A}$, tal que $\bigcup A_n = \Omega$ y cada $\mu(A_n) < \infty$.

Llamaremos probabilidad a toda medida verificando $\mu(\Omega) = 1$.

¹¹ Algunos autores la llaman medida positiva.

En nuestro caso, dado un espacio topológico (Ω, \mathcal{T}) , su unión $\cup_i A_i \in \mathcal{T}$, llamaremos σ -álgebra de Borel a la generada por sus abiertos, que denotaremos $\sigma(\mathcal{T}) = \beta(\Omega)$ y a sus elementos borelianos.

Ahora falta ver que H_δ^s es una función a valores positivos y que satisface la aditividad numerable:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \beta, \quad A_j \cap A_k = \emptyset, \quad j \neq k \\ \Rightarrow H_\delta^s \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} H_\delta^s (A_n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

En efecto por cada boreliano A se tiene que $0 \leq H_\delta^s (A) \leq \infty$ esto porque, $\delta_i^s > 0$ luego $0 < \sum_i \delta_i^s \leq \infty$ aplicando el ínfimo en cada miembro de la desigualdad tenemos entonces que $0 \leq H_\delta^s (A) \leq \infty$.

Definición 2.6

Sea β la familia de los Borelianos de \mathbb{R}^n , $s \in \mathbb{R}^+$ y $\delta > 0$ se define la MEDIDA DE HAUSDORFF cuya notación es H_δ^s como la función:

$$\begin{aligned} H_\delta^s: \beta \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ A \rightarrow H_\delta^s(A) = \inf_{\{\mathcal{B}_i\}} \{ \sum_i \delta_i^s \} \end{aligned}$$

donde:

$\{\mathcal{B}_i\}_{i=1, \dots, \infty}$ es un δ -recubrimiento de A y $\delta_i = \text{diam} (\mathcal{B}_i) < \delta$.

2.4.1 Propiedades de la medida de Hausdorff

Juventeny (2016) manifiesta que H_δ^s es una medida positiva σ -aditiva, (p.18). De esto se sigue que H_δ^s cumple con las siguientes propiedades:

- $H_\delta^s(\emptyset) = 0$, por definición.
- Aditividad numerable:

$$\forall j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad j \neq k$$

$$\Rightarrow H_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n H_\delta^s(A_j)$$

Esto se demuestra utilizando la propiedad de aditividad numerable, y tomando $\forall k > n, \quad A_k = \emptyset$.

- Monotonía:

Para todo $A, B \in \beta$, si $A \subseteq B \quad H_\delta^s(A) \leq H_\delta^s(B)$

Demostración: Como A es un subconjunto de B se cumple que $B = A \cup (B - A)$ y $A \cap (B - A) = \emptyset$

$$H_\delta^s(B) = H_\delta^s(A) + H_\delta^s(B - A) \geq H_\delta^s(A) \tag{2.4}$$

por lo tanto, $H_\delta^s(A) \leq H_\delta^s(B)$ (2.5)

Definición 2.7

Según Juventeny, A. (2016) la medida *s-Dimensional de Hausdorff* de A se define como:

$$H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(A) \tag{2.6}$$

Nota: Por cada boreliano A se tiene que $0 \leq H^s(A) \leq \infty$ esto porque, $0 \leq H_\delta^s(A) \leq \infty$ y aplicando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ en cada miembro de la desigualdad se tiene que $0 \leq H^s(A) \leq \infty$.

2.4.2. Propiedades de la medida s -dimensional de Hausdorff

De la misma manera que se hizo para la medida de Hausdorff, se puede demostrar que H^s es una medida positiva σ -aditiva. Por tanto cumple también con las siguientes propiedades:

- $H^s(\emptyset) = 0$
- Aditividad finita

$$\forall j, j = 1, 2, \dots, n \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad j \neq k \Rightarrow$$

$$H^s\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n H^s(A_j)$$

- Monotonía
- $\forall A, B \in \beta \quad \text{si } A \subseteq B \quad H^s(A) \leq H^s(B)$

2.5 Dimensiones de Hausdorff y fractal

El parámetro S no negativo juega un rol esencial en la medida s -dimensional de Hausdorff.

En efecto, para cada conjunto A y $\delta < 1$, con $t > S$ se tiene para un δ -recubrimiento de A :

$$\delta_i^t < \delta_i^s$$

$$\delta_i^t \leq \delta^{t-s} \delta_i^s$$

donde los δ_i son los diámetros del δ -recubrimiento de A . Además, se cumple también:

$$\sum_i \delta_i^t \leq \delta^{t-s} \sum_i \delta_i^s$$

tomando el ínfimo resulta:

$$H_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(A)$$

en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ vemos que si $H^s(A) < \infty$ entonces:

$$H^t(A) \leq 0 H^s(A) \tag{2.7}$$

$$H^t(A) = 0.$$

Análogamente, para $s > t$ se llega a la conclusión que $H^t(A) = \infty$.

Para $s = t$ se puede decir que $0 \leq H^t(A) \leq \infty$.

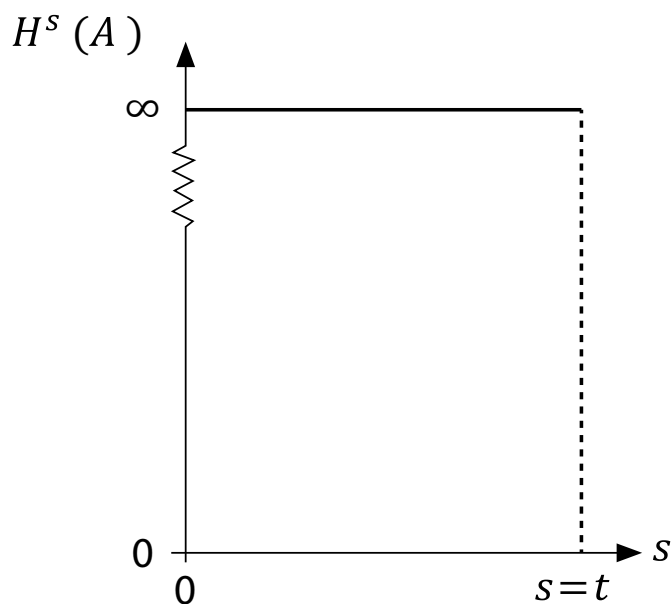


Figura 2.3. $H^s(A)$ vs. s salta de ∞ a 0 en correspondencia con el valor crítico de s .

Definición 2.8

Dado un boreliano no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$, sea:

$$\begin{aligned}
 D(A) &= \inf \{s > 0 / H^s(A) = 0\} \\
 &= \sup \{s > 0 / H^s(A) = \infty\}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Diremos que A tiene dimensión de Hausdorff-Besicovitch denotada con $D(A)$ (Juventeny, 2016).

En particular se tiene que

$$H^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < D(A) \\ 0 & \text{si } s > D(A) \end{cases} \quad (2.9)$$

Si $s = D(A)$ entonces $H^s(A)$ puede ser cero, infinito o satisfacer:

$$0 < H^s(A) < \infty. \quad (2.10)$$

Definición 2.9

Si la dimensión de Hausdorff excede la dimensión topológica, entonces la primera es denominada dimensión fractal.

La dimensión fractal es un número no negativo que permite la comparación entre conjuntos fractales diversos, en cierta forma mide la capacidad que tiene un conjunto de llenar el espacio donde está incluido.

2.5.1. Propiedades de la dimensión de Hausdorff

La dimensión de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:

1. Conjuntos abiertos.- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ (donde $n = 1, 2, 3 \dots$) es abierto, entonces $D(A) = n$ ya que A contiene una bola n -dimensional de volumen positivo.

2. Monotonía.- Si $A \subseteq B$ entonces $D(A) \leq D(B)$ esto se sigue inmediatamente del hecho que H^s es una medida y por tanto cumple la propiedad de monotonía; es decir, $H^s(A) \leq H^s(B)$

3. Estabilidad numerable.- Sean A_1, A_2, \dots , una colección numerable de conjuntos borelianos entonces:

$$D\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_i \{D(A_i)\} \quad (2.11)$$

(es decir, la dimensión de Hausdorff de un conjunto es el supremo de las dimensiones de sus subconjuntos).

4. Conjuntos numerables.- Si A es numerable, entonces $D(A) = 0$, por la propiedad anterior en la que se toma A_i como un solo punto.

2.5.2 Dimensión de conteo de cajas como una aproximación a la dimensión de Hausdorff

Para entender el comportamiento de la medida de Hausdorff H_δ^s de un conjunto finito de puntos en el espacio, aproximemos esta medida usando hipercubos de lado δ disjuntos entre sí como δ -recubrimiento, de modo que se produzca un (aproximado) recubrimiento óptimo; es decir, ignoramos el ínfimo. (Nakayama & Yakubo, 2003).

Entonces, se establecen las siguientes proporcionalidades (Larraz Mora, 2002):

$$H_\delta^s \propto \sum_{i=1}^{N(\delta)} \delta^s = N(\delta)\delta^s \quad (2.12)$$

donde $N(\delta)$ es el número total de cajas requeridas para cubrir el conjunto (por ejemplo, para un conjunto incluido en un espacio tridimensional, usamos cubos; en un espacio bidimensional, usamos cuadrados, etc.).

Para una línea de medida L_0 incluido en el espacio unidimensional, el número N de segmentos lineales de longitud δ necesarios para recubrirla es:

$$N(\delta) = L_0/\delta$$

La longitud L de la línea es:

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^0 = L_0$$

La medida L llega a ser asintóticamente igual a la longitud de la línea y es independiente de δ .

Si asociamos un área A con el conjunto de puntos de una línea, el número de cuadrados es nuevamente $N(\delta)$ y cada cuadrado tiene un área de δ^2 . El área viene dada por:

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^1 = 0$$

De manera similar si asociamos un volumen V :

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3 = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^2 = 0$$

Según nuestro método de medida el área y el volumen de una línea tienden a cero a medida que δ se hace más pequeño. En el caso de líneas, la única medida interesante es la longitud.

Si consideramos a continuación un conjunto de puntos que definen una superficie de Área A_0 y empleamos cuadrados para realizar la medida tenemos:

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^0 = A_0$$

El número de cuadrados necesarios para recubrir a superficie es $N(\delta) = A_0/\delta^2$. En el límite, el área de la superficie se aproxima a A_0 a medida que δ tiende a 0.

El volumen de la superficie analizada es:

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3 = \lim_{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^1 = 0$$

Formalmente se puede asociar una longitud con una superficie:

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_0 \delta^{-1} = \infty$$

La longitud se hace infinita para una superficie por lo que la única medida útil es el área.

Según Kraft, R. (1995) si definimos una función $h(\delta) = \gamma\delta^s$ para recubrir un conjunto A de medida (Larraz Mora, 2002).

$$H_\delta^s = \sum h(\delta) = \sum \gamma\delta^s = \gamma(s)N(\delta)\delta^s \quad (2.13)$$

donde γ es un factor geométrico. Ahora analicemos el valor de la medida s -dimensional de Hausdorff. Aplicando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ a ambos lados de (2.13) resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(s)N(\delta)\delta^s \\ &= H^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < D(A) \\ 0 & \text{si } s > D(A) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como ya se ha indicado, existe un valor de s para el cual la medida s -dimensional de Hausdorff puede ser un valor finito a ; es decir, si se cumple esto para un S igual a la dimensión de Hausdorff del conjunto A ; es decir $S = D(A)$ se tiene que:

$$H^D(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^D(A) = a \quad (2.15)$$

Si $H^s(A)$ no es finita, es decir $H^s(A) = \infty$ entonces $S < D(A)$, como puede verse en la ecuación 2.14.

A modo de ejemplo puede verse que la medida de una curva, superficie y volumen finitos son respectivamente los siguientes (Larraz Mora, 2002)

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = L_0 \\
 A &= \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = A_0 \\
 V &= \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3 = V_0
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Para que estas ecuaciones tiendan a aquel valor finito respectivo tiene que ser $D = S$. De ahí que, observando las ecuaciones (2.16), se concluye que el exponente de δ es $s = 1$ para una curva, $s = 2$ para una superficie y $s = 3$ para un volumen; esto es, la dimensión de Hausdorff es $D = 1$ para una curva, $D = 2$ para una superficie y $D = 3$ para un volumen.

Mandelbrot (1996) ideó un método sencillo para estimar la dimensión de *Hausdorff-Besicovith* $D(A)$ es el llamado conteo de cajas. Así, un conjunto puede recubrirse con cuadrados de longitud δ y este proceso puede realizarse para cuadrados de diferentes longitudes δ . El número de cuadrados de diferente tamaño δ necesarios para recubrir un conjunto viene dado por la expresión:

$$N(\delta) = a\delta^{-D_{caja}(A)} \tag{2.17}$$

Donde $D_{caja}(A)$ es la llamada dimensión por conteo de cajas y coincide aproximadamente con la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

Definición 2.10

La aproximación por conteo de cajas de la dimensión de Hausdorff puede considerarse como una definición de dimensión por conteo de cajas (también llamada dimensión de cajas y algunas veces dimensión de capacidad). Esta nueva dimensión será denotada como: $D_{caja}(A)$ que se definirá como aquella que satisfaga:

$$N(\delta) = a\delta^{-D(A)} \tag{2.18}$$

La cual evidentemente puede ser obtenida a partir de la pendiente que resulta del gráfico $\ln N(\delta)$ vs. $\ln \delta$, que es una recta con pendiente $-D$ como fácilmente puede constatarse mediante la expresión (2.18):

$$\ln N(\delta) = \ln(a\delta^{-D(A)}) \tag{2.19}$$

$$\ln N(\delta) = \ln a - D(A) \ln \delta$$

Cuya representación gráfica es, por lo tanto, como la que semuestra en la Fig. 2.4.

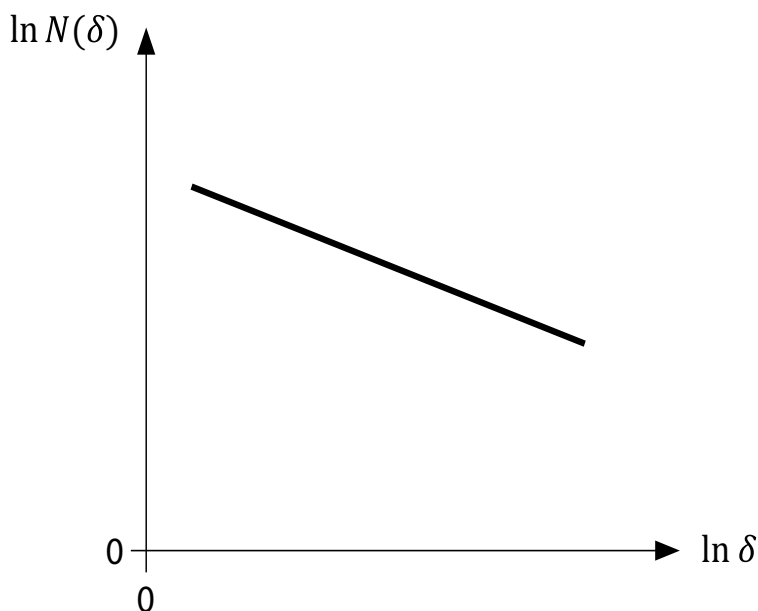


Figura 2.4. El gráfico de $\ln N(\delta)$ vs. $\ln \delta$ es una recta con pendiente. $-D$.
 Fuente: adaptado de (Helmberger, et al., 2014)

3. CONJUNTOS FRACTALES

3.1 Introducción

El desarrollo de la geometría y su aplicación a los objetos presentes en la naturaleza ha demostrado ser de fundamental importancia en varios campos de la ciencia. A este mismo respecto, Mandelbrot, en un gran número de artículos científicos, trata con la geometría de muchos fenómenos naturales, que van desde la escala subatómica hasta la planetaria. El mismo Mandelbrot (1983) fue quien introdujo la ahora denominada geometría fractal.

Mandelbrot, usando la geometría fractal y apoyado en algoritmos adecuados que han sido corridos en modernas computadoras, ha logrado construir hermosos paisajes. De aquí se deduce que los fractales capturan la esencia de la superficie topográfica de la Tierra (Mandelbrot B. B., 1983).

El término *fractal* fue tomado del latín *fractus* para describir objetos (reales y abstractos) considerados “irregulares” por la geometría tradicional. Algunos ejemplos son:

- perfiles costaneros
- asperidad topográfica
- las fluctuaciones en meteorología
- las oscilaciones en economía

A fin de desarrollar la teoría básica de la geometría fractal, en este capítulo se discuten conceptos relacionados a su definición, propiedades y *homotecia*.

3.2 Definición de fractal

Mandelbrot (1983) ofrece la siguiente definición tentativa de un fractal.

Definición 3.1

"Un conjunto A se dice que es un fractal si la Dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que la Dimensión Topológica".

Y Mandelbrot (1986) propone nuevamente otra definición de fractal:

Definición 3.2

“Un fractal es algo hecho de partes similares al todo”.

Esta última definición contiene una característica importante de muchos objetos o fenómenos naturales, esto es que un fractal se ve lo mismo a cualquier escala (ver Fig. 3.1).



Figura 3.1. Formación de cristales detríticos.

Fuente: <https://pxhere.com/es/photo/418780>

Cabe señalar que hasta ahora no existe una definición satisfactoria y que sea completamente aceptada, ya que cada una de las propuestas excluyen elementos considerados como fractales por otras. Así, por ejemplo, si consideramos el espacio euclídeo con dimensión $n = 3$ y una recta incluida en este espacio, con $D_H = 1$ y $D_T = 1$; según la primera definición de las aquí propuestas, la recta no sería un fractal, pero por la segunda sí lo es, pues la recta se ve la misma en cualquier escala.

3.3 Propiedades de los fractales

3.3.1 Intersección de fractales

La propiedad de la intersección de conjuntos fractales es extremadamente importante, especialmente en las aplicaciones prácticas. Así, considérese el problema de determinar la intersección de dos conjuntos fractales E, F con dimensiones $D(E)$, y $D(F)$, respectivamente.

Introduzcamos ahora la definición de codimensión (fractal) geométrica. Además, denotemos en esta sección la dimensión fractal de un conjunto F como $dim_F(F)$. (ver definición 1.8).

Definición 3.3

Dados dos conjuntos borelianos X y $F \subset X$, la codimensión (fractal) geométrica, de F denotada como $cod_F(F)$ está dada por:

$$cod_F(F) = dim_F(X) - dim_F(F) \quad (3.1)$$

si la $dim_F(X) < \infty$.

Pasemos ahora a expresar el número $N_\delta(F)$ de hipercubos de lado δ que cubren F , por medio de la dimensión fractal de F :

$$N_\delta(F) \propto \delta^{-s} \quad (3.2)$$

donde $dim_F(F) = s$.

Definición 3.4

Dados dos conjuntos borelianos, F y E , supongamos que $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$, y que la $dim_F(E) = D$; la fracción de E ocupada por F (en la escala δ), denotada como $Fr_\delta(F)$, está dada por:

$$Fr_\delta(F) \propto \delta^D \delta^{-s} = \delta^c \quad (3.3)$$

donde, $c = D - S$ es la CODIMENSIÓN (fractal) de F .

Pasemos a interpretar $Fr_\delta(F)$ como la probabilidad de que un punto escogido al azar de E pertenezca a F .

Consideremos dos conjuntos fractales A y B incluidos en E y estadísticamente independientes, podemos afirmar que la probabilidad de que un punto “escogido al azar” de E pertenezca a $A \cap B$ es proporcional al producto de $Fr_\delta(A) Fr_\delta(B)$.

Con base en el trabajo de Schertzer, D., Lovejoy, S., & Hubert, P. (2002), a continuación se establece el teorema de la intersección de conjuntos fractales (Schertzer, Lovejoy, & Hubert, 2002).

Teorema 3.1. (Teorema de la intersección de conjuntos fractales)

Dados dos conjuntos fractales A y B independientes ¹² en $E \subset \mathbb{R}^n$ (donde $n = 1, 2, 3 \dots$) y usando la notación precedente se tiene que:

$$cod_F(A \cap B) = \inf \{ D, cod_F(A) + cod_F(B) \} \quad (3.4)$$

Demostración

Ya que: $Fr_\delta(A \cap B) = Fr_\delta(A) Fr_\delta(B)$

entonces: $\delta^{cod_F(A \cap B)} = \delta^{cod_F(A) + cod_F(B)}$

$$cod_F(A \cap B) = cod_F(A) + cod_F(B) \quad (3.5)$$

Aplicando logaritmo en base δ a ambos miembros de la ecuación (3.5), resulta:

$$cod_F(A \cap B) = dim_F(B) - dim_F(A \cap B) \quad (3.6)$$

Esto significa que las codimensiones son aditivas bajo intersección, pero esto solamente tiene sentido geométrico si $cod_F(A \cap B) \leq D$.

En efecto de (3.1) resulta que:

$$cod_F(A \cap B) = dim_F(B) - dim_F(A \cap B)$$

¹² Dos conjuntos fractales A y B se dicen independientes si la probabilidad de $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\text{cod}_F(A \cap B) - D = -\text{dim}_F(A \cap B)$$

De ahí que si $\text{cod}_F(A \cap B) \leq D$, entonces $\text{dim}_F(A \cap B) \geq 0$ lo cual es correcto (por una de las propiedades de la dimensión de Hausdorff) pero si $\text{cod}_F(A \cap B) > D$ entonces $\text{dim}_F(A \cap B) < 0$, un valor que carece de sentido geométrico.

Así para conjuntos fractales donde $\text{cod}_F(A \cap B) > D$ implica que no se intersecan. Por lo tanto, para que se dé la intersección de dos conjuntos fractales debe al menos cumplirse que $\text{dim}_F(A \cap B) = 0$ con lo que $\text{cod}_F(A \cap B) = D$.

Así, combinando todos estos resultados se puede resumir en el teorema de la intersección:

$$\text{cod}_F(A \cap B) = \inf \{D, \text{cod}_F(A) + \text{cod}_F(B)\}$$

3.3.1.2 Proyección de fractales

Considérese la proyección de un conjunto A (incluido en algún espacio, proyectado sobre un subespacio). Para concretar, considérese una mancha de nube proyectada sobre la superficie de la Tierra (la proyección es la sombra de la nube; véase la Fig. 3.2). (Sánchez, Alfaro, & Pérez, 2005)

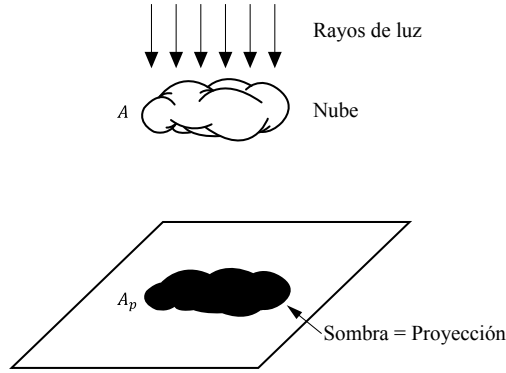


Figura 3.2. Proyección de una nube.

La proyección sobre un plano posee la dimensión $D(A_p) = \min \{D(A), 2\}$. Para probar esto, se debe utilizar precisamente el teorema de intersección para cada rayo de luz. Si algún subconjunto de la nube tiene $D > 2$, entonces de acuerdo al teorema de la intersección, una intersección ocurrirá para todos los rayos que van hacia la correspondiente región, de ahí que $D_{sombra} = 2$ implica que la sombra tiene un área. Inversamente, para cualquier subconjunto de la nube con $D < 2$, los rayos de luz generalmente no intersecarán; por lo que la dimensión de la proyección será la misma del conjunto original.

A este punto y en base a simples observaciones, se puede concluir que existen subconjuntos de nubes con $D_{nube} > 2$ (por el teorema de intersección); estos subconjuntos darían lugar a las sombras.

En general

$$D(A_p) = \min \{D(A), D \text{ (de la proyección espacial)}\} \quad (3.7)$$

Nótese que, en nubes reales, se da la múltiple dispersión de la luz; el campo de radiación resultante no está trivialmente relacionado al campo de agua líquida contenido en la nube. Esto conlleva a que no se deduzcan directamente y en forma completa las variaciones de la densidad de las nubes de agua a partir de los campos de radiación asociados.

3.3.2 Producto de fractales: adición de dimensiones

Según Falconer, K. sean S_1 y S_2 conjuntos incluidos en los espacios euclidianos \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n , respectivamente.

Denotemos con $S = S_1 \otimes S_2 \subset \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ el producto cartesiano de S_1 y S_2 . Según Falconer (1990) se tiene que:

$$D(S_1 \otimes S_2) = D(S_1) + D(S_2) \quad (3.8)$$

3.4 Similitud y homotecia

Entre los fractales más simples se incluyen aquellos “intrínsecamente simétricos” constituidos por partes similares al conjunto global (Feder, 1988).

Nota: La auto-similaridad no es una propiedad solo de fractales.

Definición 3.5

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es **auto-Similar** si es invariante¹³ respecto a traslaciones y homotecia.

Ejemplo: Mostremos que la recta es un conjunto **auto-similar**.

Para ser más precisos, consideremos una recta S incluida en el espacio tridimensional que pasa por el punto \mathbf{x}_0 y con dirección \mathbf{a} , cuya ecuación está dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t \mathbf{a}, \quad -\infty < t < +\infty \quad (3.9)$$

donde, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{a} = (d_1, d_2, d_3)$

Si se cambia la escala de longitud, multiplicando las componentes de cada punto \mathbf{x} de la recta por r , entonces los puntos \mathbf{x} se transforman en nuevos puntos $\mathbf{x}' = r\mathbf{x} = (rx_1, rx_2, rx_3)$ obteniéndose así un nuevo conjunto de puntos rS , dado por:

¹³ Un conjunto A es invariante si no cambia al aplicarle transformaciones geométricas.

$$\mathbf{x}' = r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + t'\mathbf{a} - (1 - r)\mathbf{x}_0 \quad (3.11)$$

donde $-\infty < t' < +\infty$, con $t' = rt$

Si ahora se traslada el nuevo conjunto de puntos, rS , a la posición $(1 - r)\mathbf{x}_0$ se recobra el conjunto original de puntos S . Es decir que la línea es invariante bajo cambio de escala.

Usando un análisis análogo al interior también se demuestra que la recta es invariante bajo traslaciones $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}n$, con n cualquier número real.

Así, por ejemplo, con estos argumentos se concluye que el plano y el espacio tridimensional son invariables bajo traslación y homotecia.

Otros conjuntos no cumplen con estas fuertes simetrías de traslación e invarianza de escala. Por ejemplo, el círculo no es invariante bajo traslaciones o bajo cambio de escala (pero si es invariante bajo rotaciones alrededor de su centro).

3.4.1 Dimensión de similaridad

Un segmento finito S de una recta no es invariante bajo homotecia, ya que trasladándole siempre resulta un nuevo conjunto de puntos. Sin embargo, si se cambia la longitud por un factor de escala $r < 1$, se genera un nuevo conjunto de puntos $S' = rS$ que es un segmento de recta más pequeño (es decir de diámetro más pequeño). Este segmento puede ser trasladado para cubrir parte del segmento original S , el cual para ser cubierto totalmente requiere de N segmentos S' . En este caso se dice que el conjunto S es auto-similar con respecto al factor de escala r .

Por ejemplo, para un segmento de longitud unitaria podemos escoger $r(N) = 1/N$, con N cualquier entero; para un rectángulo podemos escoger $r(N) = (1/N)^{1/2}$. Similarmente para un cubo escogemos $r(N) = (1/N)^{1/3}$.

En general, el factor de escala se expresa por:

$$r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D_s}} \quad (3.12)$$

Por lo que D_s , conocida como dimensión de similaridad, vale 1, 2 y 3; para segmentos, rectángulos y cubos, respectivamente.

Definición 3.6

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, la dimensión de similaridad del conjunto A , denotada como D_s , se define como:

$$D_s = -\frac{\ln N}{\ln r(N)} \quad (3.13)$$

donde $r(N)$ es el factor de escala y N es cualquier número entero.

El factor de escala $r(N)$ y N de un conjunto autosimilar no están unívocamente determinados por D_s , ya que se verifica que conjuntos con parámetros (F, N) y (r^n, N^n) tienen la misma dimensión de similaridad.

Comparando las ecuaciones (2.18) y (3.13) se ve que al tomar un $\delta = r(N)$ resulta que la dimensión fractal coincide con la dimensión de similaridad. Por supuesto esto será cierto solo para conjuntos fractales autosimilares.

Por lo expuesto anteriormente, para conjuntos fractales autosimilares, la dimensión de similaridad al igual que la dimensión fractal, mide la capacidad que tiene un conjunto de llenar el espacio donde está incluido.

Ejemplo:

El cuadrado de lado 1 es un fractal autosemejante formado por $N = 4$ copias cuyas a escala $r = 0.5$. La dimensión de similaridad de un cuadrado es 2 como se puede ver a continuación:

$$D_s = -\frac{\ln N}{\ln r(N)}$$

$$D_s = -\frac{\ln 4}{\ln 0.5}$$

$$D_s = 2$$

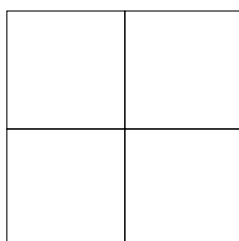


Figura 3.3. Cuadrado de lado 1.

El cuadrado de lado 1 es un fractal autosemejante formado por $N = 4$ copias de sí mismo a una escala $r = 0.5$.

A menudo resulta útil el siguiente punto de vista acerca de la invarianza de escala.

Definición 3.7

Las funciones que satisfacen la relación de homogeneidad:

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t) \tag{3.14}$$

para todos los valores positivos del factor de escala λ , se dice que son **funciones de homotecia**.

Teorema 3.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $n = 1, 2, \dots$, $\lambda > 1$ y $\lambda^D A = \{\lambda^D x / x \in A\}$

entonces:

$$H^s(\lambda^{-1} A) = \lambda^{-s} H^s(A) \tag{3.15}$$

donde $\lambda^{-1}A$ representa una reducción del conjunto A por un factor (ver Fig. 3.4).

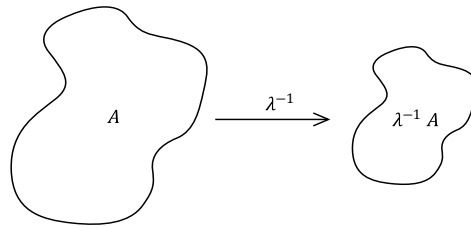


Figura 3.4. Reducción del conjunto A por un factor λ .

Demostración:

Sean:

el δ -recubrimiento del conjunto A

$\lambda^{-1}A$ la reducción del conjunto A por un factor λ

el δ' -recubrimiento de $\lambda^{-1}A$

$$\delta' = \lambda^{-1}\delta$$

$$\delta'_i = \lambda^{-1}\delta_i$$

$$\begin{aligned} H_{\lambda^{-1}\delta}^s(\lambda^{-1}A) &= \inf_{\{B'_i\}} \left\{ \sum_i \delta'^s_i \right\} \\ &= \lambda^{-s} \inf_{\{B_i\}} \left\{ \sum_i \delta^s_i \right\} \\ &= \lambda^{-s} H_{\delta}^s(A) \end{aligned}$$

entonces aplicando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\lambda^{-1}\delta}^s(\lambda^{-1} A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda^{-s} H_{\delta}^s(A)$$

se sigue que:

$$H^s(\lambda^{-1} A) = \lambda^{-s} H^s(A)$$

De este teorema se concluye que H^s es una función de homotecia con $\alpha = S$.

3.5 La curva triádica de koch

Esta curva (ver Fig. 3.5) se introduce como un ejemplo de la determinación de la dimensión fractal.

La construcción de la curva de Koch inicia con un segmento de recta unitario de longitud $L(1) = 1$, con $\delta = 1$. A este segmento lo denominaremos iniciador. El iniciador es la 0-ava generación de la curva de Koch. Para construir la curva de Koch se procede a reemplazar el iniciador por el generador, mostrado como la curva marcada con $n = 1$ de la Fig. 3.5, la cual es una curva con cuatro segmentos de recta cada uno de longitud $1/3$. La longitud de la curva es ahora $L(1/3) = 4/3$ con $\delta = 1/3$.

La siguiente generación se obtiene reemplazando cada segmento de línea por una versión del generador en menor escala. Por lo tanto, la segunda generación consiste en una curva con $N = 4^2 = 16$ segmentos cada uno de longitud $\delta = 3^{-2} = 1/9$, y la longitud de esta curva es $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$.

Análogamente, si se aplica un generador reducido a todos los segmentos de la curva se obtiene una nueva generación. Tal curva es llamada **prefractal**.

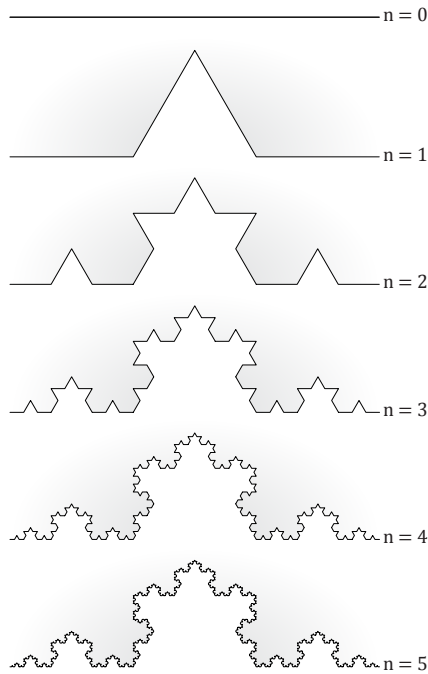


Figura 3.5. Construcción de la curva tríadica de Koch.

Ya que nuestro propósito es encontrar la dimensión fractal de esta curva comencemos calculando la dimensión de Hausdorff definida en la ecuación (2.14) de la siguiente manera: en la n -ava generación tenemos $N(\delta) = 4^n$ segmentos cada uno de longitud $\delta = 3^{-n}$, la longitud de la n -ava generación prefractal está dada por $L(\delta) = (4/3)^n$.

Así la medida de Hausdorff resulta ser igual a:

$$H_\delta^s \approx \sum_{i=1}^N \delta^s = N(\delta) \delta^s = 4^n 3^{-ns} \tag{3.16}$$

La misma que diverge o tiende a cero a medida que δ decrece, a menos que se escoja $s = D$. Y, según el δ - **recubrimiento** tomado, resulta que:

$$N(\delta) = \delta^{-D}$$

entonces:

$$4^n = (3^{-n})^{-D}$$

$$4^n = 3^{nD}$$

$$e^{n \ln 4} = e^{nD \ln 3}$$

$$n \ln 4 = n D \ln 3$$

$$n \ln 4 = n D \ln 3$$

$$\ln 4 = D \ln 3$$

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \tag{3.17}$$

donde D = dimensión fractal de la curva de Koch.

Ya que la dimensión de Hausdorff excede estrictamente la dimensión topológica ($D_T = 1$), de la curva de Koch, se concluye que esta curva es un fractal con dimensión fractal $D \approx 1.26$.

Aplicando la definición 3.6 a la curva de Koch, resulta que:

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t) \tag{3.18}$$

con $\alpha = 1$ y $\lambda = (1/3)^n$.

3.6 El conjunto triádico de cantor

El conjunto triádico de Cantor genera muchas propiedades y características importantes de los fractales. Como se muestra en la Fig. 3.6, el iniciador es el intervalo unitario $[0,1]$, el generador divide el intervalo en tres partes iguales y borra la parte de la mitad dejando sus puntos extremos. El generador es aplicado otra vez a cada una de las dos partes. Este procedimiento se repite indefinidamente, con lo que se generan rápidamente segmentos de otra longitud. La figura muestra la construcción de las primeras cinco generaciones. (Rubiano, 2002).



Figura 3.6. Construcción del conjunto triádico de Cantor.
 Fuente: (Mandelbrot B. B., 1983)

Después de un número infinito de generaciones, lo que permanece es un número infinito de puntos dispersos sobre el intervalo, a los cuales se les suele llamar polvo de Cantor. (Mandelbrot B. B., 1983).

En lo que sigue se evalúan varias de las dimensiones introducidas en las secciones precedentes para el conjunto de Cantor.

Comencemos calculando la dimensión de Hausdorff definida en la ecuación (1.14): en la n -ava generación tenemos $N(\delta) = 2^n$ segmentos cada uno de longitud $l_i = (1/3)^n$, para $i = 1, \dots, N(\delta)$; de ahí que es posible cubrir completamente el conjunto triádico de Cantor con segmentos de longitud $\delta = l_i$. Así la medida de Hausdorff resulta ser igual a:

$$H_{\delta}^s \approx \sum_{i=1}^N \delta^s = N(\delta) \delta^s = 2^n (1/3)^{ns} \quad (3.19)$$

La misma que diverge o tiende a cero a medida que δ decrece, a menos que se escoja $s = D$. Y, según el δ - **recubrimiento** tomado, resulta que $N(\delta) = \delta^{-D}$, entonces:

$$\begin{aligned}\delta^{-D} \delta^D &= 2^n (1/3)^{nD} \\ D &= - \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} \\ D &= - \frac{\ln 2^n}{\ln (1/3)^n} \\ D &= \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.633\end{aligned}\tag{3.20}$$

Ya que la dimensión topológica del conjunto de Cantor es $D_T = 0$ con $D_T < D$ se concluye que el conjunto triádico de Cantor es un fractal con dimensión

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.633.$$

Para hallar la dimensión de similaridad se puede considerar que, cambiando la escala de longitud por un factor $r = 1/3$, se requieren $N = 3$ segmentos para cubrir el segmento original, entonces la dimensión de similaridad según la ecuación (3.13) es:

$$D_S = - \frac{\ln N}{\ln(1/r)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.633\tag{3.21}$$

Como se observa la dimensión de similaridad coincide con la dimensión fractal para el conjunto triádico de Cantor. De esto se concluye que el conjunto triádico de Cantor es **autosimilar**.

A continuación, se analiza el caso en que los segmentos de la curva triádica de Cantor de la Fig. 3.6 no son de la misma longitud. Para ello considérese la Fig. 3.7 donde se muestra la barra de Cantor que resulta cuando el segmento de la izquierda tiene longitud $l_1 = 1/4$, y el otro tiene longitud $l_2 = 2/5$.

Evaluemos la dimensión de este conjunto de Cantor S :

En la n -ava generación hay $N = 2^n$ segmentos, el segmento más pequeño tiene un longitud, $l_1^n = (1/4)^n$, y el más grande un longitud $l_2^n = (2/5)^n$. Generalizando, se encuentra que hay $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ segmentos con longitud $l_1^k l_2^{n-k}$, con $k = 0, 1, 2, \dots, n$; cuya medida H_δ^S está dada por:

$$H_\delta^S = \sum_{i=1}^N l_i^S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} l_1^{kS} l_2^{(n-k)S} = (l_1^S + l_2^S)^n \quad (3.22)$$

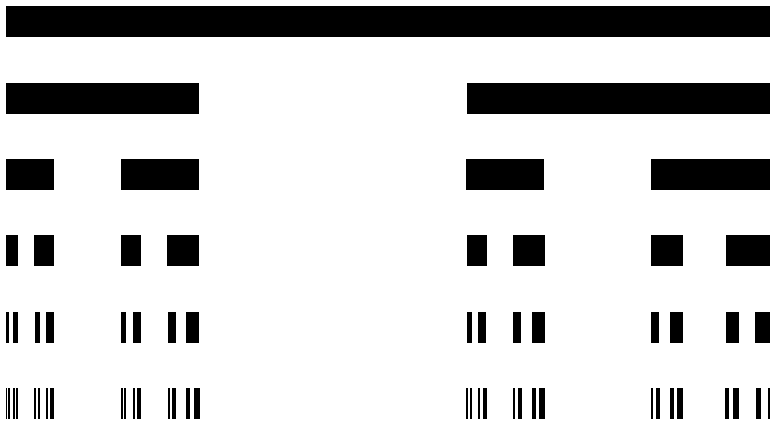


Figura 3.7. Construcción de una barra de Cantor con dos factores de escala y con $l_1 = 1/4$ y $l_2 = 2/5$. La dimensión fractal de este conjunto de Cantor es $D = 0.6110$.

Ya que n se incrementa al infinito a medida que la longitud de escala $\delta = l_2^n$ tiende a cero, resulta que H_δ permanece finita si y solo si $s = D$, donde D satisface la ecuación:

$$(l_1^D + l_2^D) = 1 \quad (3.23)$$

Por ejemplo, una solución numérica de esta ecuación con $l_1 = 1/4$ y $l_2 = 2/5$, da $D \approx 0.6110$.

4. TEORÍA MULTIFRACTAL

4.1 Introducción

Los multifractales fueron introducidos por Mandelbrot (1972, 1974) y posteriormente el interés por estos empezó con los trabajos hechos por Grassberger y Procaccia (1983).

En la literatura es posible encontrar un considerable número de aproximaciones a la definición de multifractales, pero al igual que en los fractales no existe hasta ahora una definición precisa. En la presente exposición se estudiarán desde un punto de vista geométrico.

Con la utilización de los multifractales podemos describir de mejor manera las observaciones experimentales que con un simple modelo teórico.

4.2 Medidas multifractales

Las medidas multifractales se refieren al estudio de una distribución de cantidades físicas u otro tipo de cantidades sobre un soporte geométrico. Tal soporte puede ser un plano ordinario, la superficie de una esfera o volumen, o ser un fractal. A modo de ejemplo se podría considerar la población humana distribuida sobre la superficie terrestre, la distribución de la disipación de energía en el espacio o la distribución de impurezas sobre e internamente a la superficie de una botella.

La idea de que una medida multifractal pueda representarse en términos de medidas de subconjuntos fractales interrelacionados que tienen diferentes exponentes de homotecia abre un nuevo dominio para las aplicaciones de la geometría fractal a sistemas físicos (Montero Pascual, 2003).

4.3 El proceso de compactación

Considérese una porción de algún material en forma de barra rectangular, que tiene una densidad $\rho_o = 1$ y una longitud $l_o = 1$, por lo tanto la masa será $\mu_o = 1$. Procédase ahora a cortar la barra en dos mitades de igual masa $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$ y a martillar cada una de ellas de modo que la longitud de cada parte se vuelva $l_1 = 1/3$. Mediante este procedimiento la densidad se incrementa a $\rho_1 = \mu_1/l_1 = 3/2$. Mandelbrot (1977) llamó a este proceso compactación (*curdling*), ya que una

distribución de masa originalmente uniforme se concentra en muchas pequeñas regiones con una muy alta densidad.

Repitiendo este procedimiento se encuentra que la n -ava generación consta de $N = 2^n$ barras pequeñas, cada una con longitud $l_1 = 3^{-n}$ y masa $\mu_i = 2^{-n}$; por lo tanto la densidad es $\rho_i = \mu_i/l_i = (3/2)^n$ para $i = 1, \dots, N$. Nótese que el proceso conserva la masa, esto es:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = 1 \tag{4.1}$$

De aquí que la masa de un segmento de longitud $l_i < \delta$ está dado por:

$$\mu_i = l_i^\alpha \tag{4.2}$$

donde α es una constante denominada exponente de homotecia, la cual para la barra considerada (ver la Fig. 4.1) fácilmente puede determinarse que es igual a $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

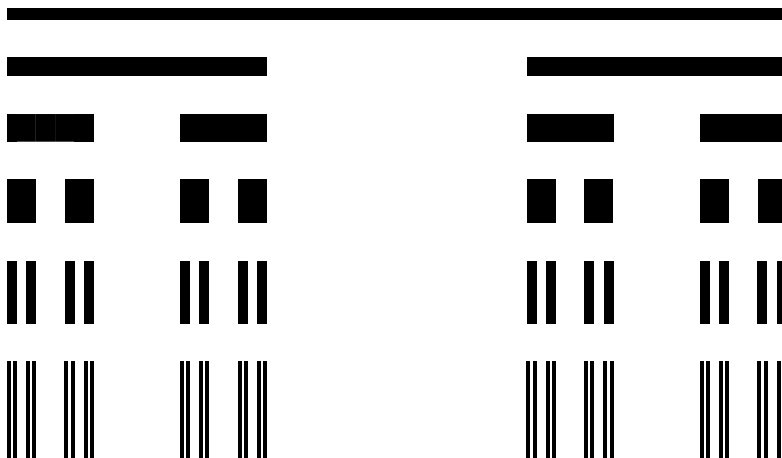


Figura 4.1. La barra triádica de Cantor.
 Adaptado de (Macek, 2007)

La densidad de cada una de las piezas es, por lo tanto, igual a:

$$\rho_i = \mu_i/l_i = \rho_0 l_i^{\alpha-1} \quad (4.3)$$

La cual diverge cuando $l_i \rightarrow 0$. El exponente α controla la singularidad de la densidad y puede también ser llamado **exponente de singularidad**.

De (4.3) se ve que a medida que la longitud de las barras va disminuyendo, estas van haciéndose cada vez de mayor densidad. En la fig 3.8 se ha graficado una versión del conjunto triádico de Cantor en la cual la altura de cada segmento está determinada por la densidad. Nótese que esta modificación en la construcción de Cantor necesita del exponente de homotecia para describir el modo en que la altura de las barras se incrementa a medida que el largo disminuye.

Por supuesto, en lugar de considerar el parámetro densidad, podría considerarse cualquier otra variable física como momento magnético, vorticidad, etc.

Una interesante construcción es la escalera del diablo que puede ser obtenida a partir de la barra de Cantor. Para ello colóquese el origen de un sistema de coordenadas en la parte izquierda de la barra mostrada en la Fig. 3.8, con el fin de encontrar la masa $M(x)$ contenida en el segmento $[0, x]$ donde x es cualquier punto del intervalo $[0,1]$, la cual formalmente puede ser escrita como:

$$M(x) = \int_0^x \rho(x)dx = \int_0^x d\mu \quad (4.4)$$

Donde:

$\rho(x)$ = densidad, siendo cero en las aberturas e infinito en todo el infinito número de puntos que constituye el conjunto de Cantor.

$d\mu$ = elemento diferencial de masa.

De aquí que la masa $M(x)$ permanece constante en los intervalos que corresponden a las aberturas, lo cual puede observarse en un gráfico de $M(x)$ vs. x , como se muestra en la Fig. 4.2.

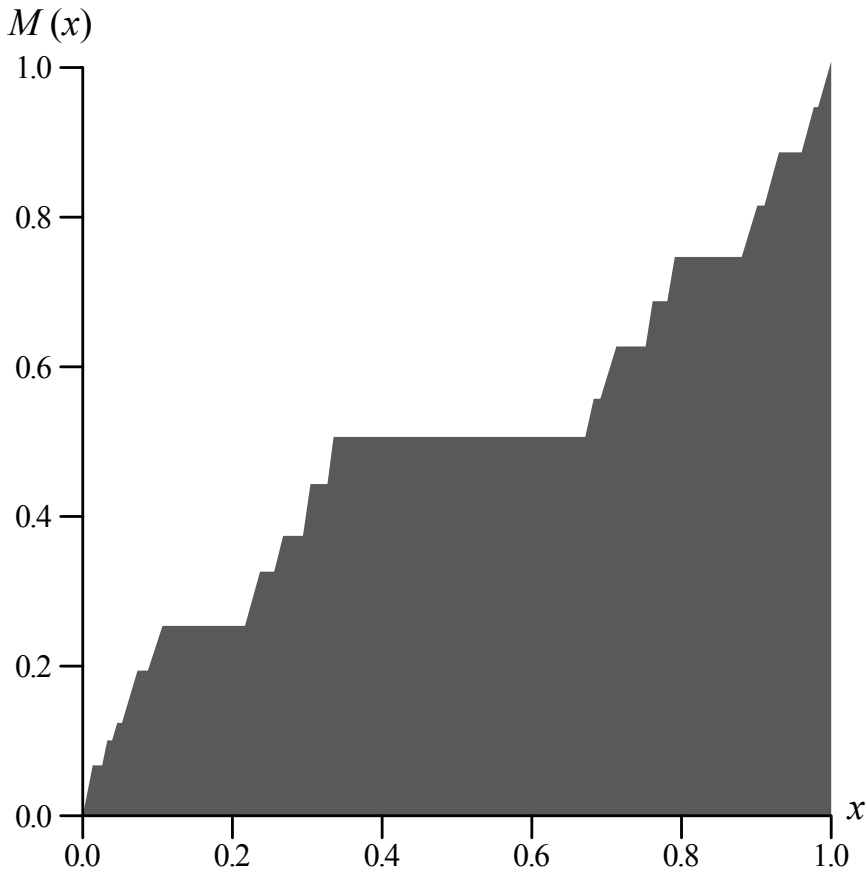


Figura 4.2. La masa de la barra triádica de Cantor como función de la posición a lo largo del intervalo $[0,1]$

Fuente: (Mandelbrot B. B., 1983)

4.4 El proceso multiplicativo binomial

Los procesos multiplicativos representan un útil instrumento de análisis y simulación, ya sea desde el punto de vista teórico o desde el punto de vista aplicativo.¹⁴

Las poblaciones o distribuciones generadas por un proceso multiplicativo tienen muchas aplicaciones y la ventaja de que estas distribuciones pueden ser fácilmente analizadas.

¹⁴ Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se denomina proceso multiplicativo si $x_{n+1} = \omega_n x_n$, donde los factores multiplicativos ω_i están idénticamente distribuidos.

Sea la población consistente de \mathcal{N} miembros distribuidos sobre el segmento $S = [0,1]$. Para caracterizar esta distribución divídase este segmento en piezas (celdas) de longitud $\delta = 2^{-n}$, de modo que para cubrir S sean necesarias $N = 2^n$ celdas. Aquí n es el número de generaciones en la subdivisión binaria del segmento.

La distribución de la población sobre el segmento se especifica, a la resolución δ , por el número de miembros de la población en la i -ava celda. La fracción de miembros de la población total en la celda i es:

$$\mu_i = \frac{\mathcal{N}_i}{\mathcal{N}} \quad (4.5)$$

la misma que constituye una conveniente medida del contenido de la celda i .

Nota: En general el número de miembros en cada celda no es el mismo.

El conjunto \mathcal{M} , dado por:

$$\mathcal{M} = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}, \quad (4.6)$$

da una completa descripción de la distribución de la población a la resolución δ . La medida $M(\mathcal{L})$ de una parte o subregión \mathcal{L} del segmento S es:

$$M(\mathcal{L}) = \sum_i \mu_i \quad (4.7)$$

Generalmente el conocimiento de estos parámetros es suficiente para describir la distribución de una población; sin embargo, si \mathcal{M} tiene una propiedad de homotecia entonces se puede decir mucho más acerca de la misma.

Así, en particular considérese el proceso multiplicativo que genera una medida en el intervalo unitario $S = [0, 1]$. Primero dividamos S en dos partes iguales, cada una de longitud 2^{-1} . La media mitad izquierda consta de una fracción p de

la población y por lo tanto tiene medida $\mu_0 = p$; y la media mitad derecha está dada por la fracción restante, es decir $\mu_1 = 1 - p$. Si se vuelve indefinidamente a hacer nuevas subdivisiones, resulta que en la n -ava generación hay $N = 2^n$ celdas etiquetadas con índices $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Siempre y cuando el conjunto M posea la propiedad de homotecia, Rodríguez-Iturbe y Rinaldo (1997) demostraron por inducción que en la n -ava generación existen:

$$N_n(\xi) = \binom{n}{\xi n} = \frac{n!}{(\xi n)! [(1 - \xi)n]!} \quad (4.8)$$

celdas que poseen la misma medida μ_ξ . Aquí $\xi = k/n$ con:
 $k = 0, 1, \dots, n$ y

$$\mu_\xi = [\mu_0^\xi \mu_1^{(1-\xi)}]^n = [p^\xi (1 - p)^{1-\xi}]^n \quad (4.9)$$

Rodríguez-Iturbe y Rinaldo (1997) también manifiestan que:

$$M([0,1]) = \sum_{i=1}^{2^n} \mu_i = \sum_{\xi} N_n(\xi) \mu_\xi = 1$$

En la n -ava generación, los $N_n(\xi)$ segmentos se generan con longitudes $\delta_n = 2^{-n}$, donde, por construcción, todos tienen la misma medida μ_ξ . Estos segmentos forman un subconjunto $S_n(\xi)$ del intervalo $S = [0, 1]$.

4.5 Subconjuntos fractales

Considérese la misma población anterior distribuida sobre el intervalo $[0,1]$.

Como ya se indicó, en la generación n hay $N_n(\xi)$ segmentos de la longitud $\delta_n = 2^{-n}$ de la misma medida μ_ξ . Ahora se demostrará que estos segmentos forman los subconjuntos $S_n(\xi)$ en el intervalo unitario, los cuales son conjuntos fractales

de puntos, con su propia dimensión fractal. Es decir, que el intervalo $[0,1]$ está constituido por la unión de subconjuntos fractales o, en otras palabras, este intervalo es un conjunto multifractal.

Para probar esto, cubramos el conjunto $S_n(\xi)$ con segmentos de longitud δ y hallemos su medida $H_\delta^s(S_\xi)$ [con la ecuación (1.14)] y la dimensión fractal $D(\xi)$ de este conjunto, mediante el estudio del comportamiento de H_δ^s a medida que $\delta \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$:

$$H_\delta^s(S_\xi) = \sum_{S_\xi} \delta^s = N_n(\xi) \delta^s \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & s > D(\xi) \\ \infty, & s < D(\xi) \end{cases} \quad (4.10)$$

Usando la fórmula de Stirling para el factorial de un número

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (4.11)$$

se tiene una expresión aproximada de $N_n(\xi)$ en la ec. (4.8)

$$N_n(\xi) \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{\sqrt{2\pi}(\xi n)^{\left(\xi n+\frac{1}{2}\right)} e^{-\xi n} \sqrt{2\pi} [n(1-\xi)]^{n(1+\xi)+\frac{1}{2}} e^{-n(1-\xi)}}$$

La que simplificando y agrupando términos queda

$$N_n(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \xi (1-\xi)} \xi^{\xi n} (1-\xi)^{n(1-\xi)}} \quad (4.12)$$

y puesto que para cubrir el segmento original se requieren piezas de $\delta = 2^{-n}$ de longitud, entonces

$$n = -\frac{\ln \delta}{\ln 2}$$

con lo que $N_n(\xi)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 N_n(\xi) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi n(1-\xi)}} e^{\ln[\xi^{-\xi n}(1-\xi)^{-n(1-\xi)}]} \\
 N_n(\xi) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi n(1-\xi)}} e^{-n[\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi)]} \\
 N_n(\xi) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi n(1-\xi)}} e^{\frac{\ln \delta [\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi)]}{\ln 2}} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Que sustituyendo en (4.10) da

$$H_\delta^s(S_\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi n(1-\xi)}} e^{\frac{\ln \delta [\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi)]}{\ln 2}} \delta^s \quad (4.14)$$

Ahora, si se toman los δ -recubrimientos de longitud tal que el proceso de recubrimiento se haga en $N_n(\xi)$ pasos, es decir que

$$N_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi n(1-\xi)}} \delta^{-f(\xi)} \quad (4.15)$$

La medida H_δ^s puede entonces escribirse, de acuerdo con la ecuación (4.10), como

$$H_\delta^s(S_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi n(1-\xi)}} \delta^{-f(\xi)} \delta^s \quad (4.16)$$

Comparando (4.14) y (4.16) queda establecido el exponente $f(\xi)$, es decir

$$f(\xi) = - \frac{\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi)}{\ln 2} \quad (4.17)$$

De aquí se sigue que para que la medida H_δ^s del conjunto S_ξ permanezca finita para $\delta \rightarrow 0$ debe satisfacerse la condición $s = f(\xi)$. Por lo tanto, la $f(\xi)$ es la dimensión fractal, $D(\xi)$ del conjunto S_ξ .

$$S = \bigcup_{\xi} S_{\xi}$$

donde los conjuntos S_ξ son fractales con dimensiones fractales $f(\xi)$ dados por la expresión (4.17). Las dimensiones fractales dependen del parámetro ξ , tal dependencia se muestra en la Fig. 4.3.

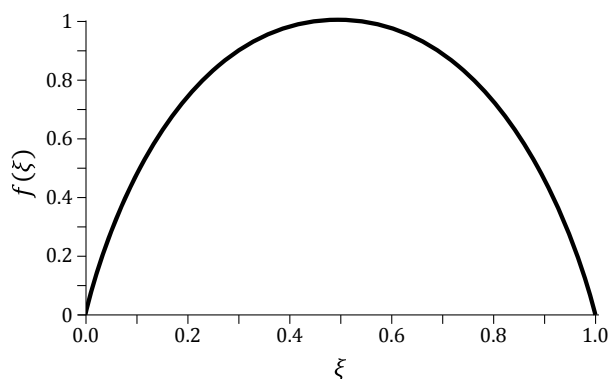


Figura 4.3. Espectro multifractal $f(\xi)$ para los subconjuntos S_ξ , generados por un proceso multiplicativo binomial con $p = 0.25$.

Adaptado de (Koscielny-Bunde, Kantelhardt, Braun, Bunde, & Havlin, 2006)

4.6 El exponente de lipschitz – hölder, α

Mandelbrot ha sugerido que el parámetro ξ no es muy útil en la práctica y más bien recomienda la utilización del exponente de Lipschitz – Hölder, α , el cual caracteriza las “singularidades” de la medida $M(x)$ (Mandelbrot B. B., 1983).

Así, considérese la medida generada por el proceso multiplicativo en la n -ava generación, esta medida es una función no decreciente de x con incrementos $\mu_\xi = [\mu_0^\xi \mu_1^{(1-\xi)}]^n$ [ver ecuación (3.9)]. Escogiendo un $x(\xi)$ que corresponde a un valor dado de ξ , miembro del conjunto S_ξ , también hay un valor de la medida

$M(x)$ para el punto $x(\xi) + \delta$ con $\delta = 2^{-n}$; la diferencia entre este punto y $x(\xi)$ es como se sabe, μ_ξ .

$$\mu_\xi = M(x(\xi) + \delta) - M(x(\xi)) \quad (4.18)$$

El exponente de Lipschitz – Hölder α se define por

$$\mu_\xi = \delta^\alpha \quad (4.19)$$

La ecuación (4.18) permanece correcta aún en el límite cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n\alpha} = 0$ si $\alpha \geq 1$. Caso contrario (si $\alpha < 1$) $\mu_\xi \rightarrow \infty$.

Para hallar la relación $\alpha(\xi)$ se puede combinar (4.9), (4.19) y la expresión $\delta = 2^{-n}$ de la siguiente manera:

se despeja α de (4.19)

$$\ln \mu_\xi = \alpha \ln \delta \quad (4.20)$$

$$\alpha(\xi) = \frac{\ln \mu_\xi}{\ln \delta}$$

se reemplaza $\mu_\xi = [p^\xi(1-p)^{1-\xi}]^n$ y $\delta = 2^{-n}$ en (4.20)

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= \frac{\ln[p^\xi(1-p)^{1-\xi}]^n}{\ln 2^{-n}} \\ \alpha(\xi) &= \frac{n \ln[p^\xi(1-p)^{(1-\xi)}]}{-n \ln 2} \\ \alpha(\xi) &= \frac{n[\ln p^\xi + \ln(1-p)^{(1-\xi)}]}{-n \ln 2} \\ \alpha(\xi) &= -\frac{[\ln p^\xi + \ln(1-p)^{(1-\xi)}]}{\ln 2} \\ \alpha(\xi) &= -\frac{\xi \ln p + (1-\xi) \ln(1-p)}{\ln 2}\end{aligned}\tag{4.21}$$

Nótese que α tiene una dependencia lineal con ξ y que ξ y α mantienen una correspondencia biunívoca.

Los valores de $\alpha(\xi)$ se encuentran en el intervalo:

$$\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$$

donde:

$$\begin{aligned}\alpha_{min} &= -\frac{\ln(1-p)}{\ln 2} \quad \text{para } \xi = 0 \\ \alpha_{max} &= -\frac{\ln p}{\ln 2} \quad \text{para } \xi = 1\end{aligned}\tag{4.22}$$

De lo visto se concluye que el conjunto S_ξ puede también escribirse como S_α y la medida $M(x)$ estar caracterizada por los conjuntos S_α , que en el intervalo $S = [0,1]$ satisface:

$$S = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}\tag{4.23}$$

La medida tiene “singularidades” con el exponente de Lipschitz – Hölder α sobre los conjuntos fractales S_α , que tienen dimensiones fractales $f(\alpha) = f(\xi(\alpha))$.

La curva $f(\alpha)$ para la medida de la población generada por el proceso multiplicativo con $p = 0.25$ se muestra en la Fig. 4.4.

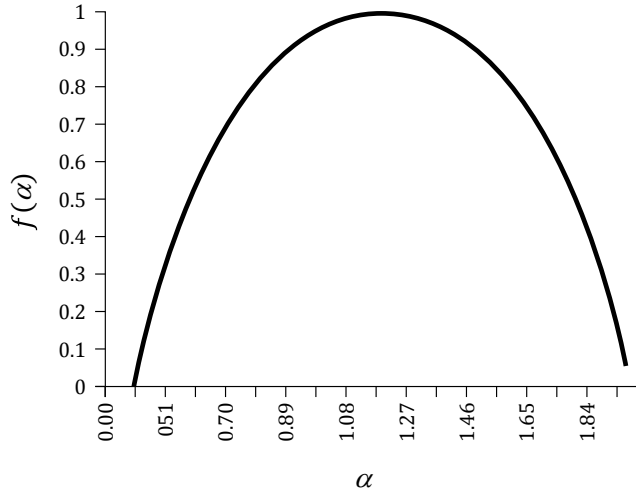


Figura 4.4. Espectro multifractal $f(\alpha)$ para los subconjuntos S_α como una función del exponente de Lipschitz – Holder α

Fuente: adaptado de (Koscielny- Bunde. Kantelhardt. braun. Bunde. & Havlin. 2006)

4.7 Propiedades de la curva $f(\alpha)$

A continuación, se deducen algunas propiedades importantes de la curva $f(\alpha)$, mostrada gráficamente en la Fig. 3.11.

Primero determinemos los valores máximos que pueden alcanzar la curva $f(\alpha)$: De la ecuación (4.21) resulta que:

$$\xi = \frac{\alpha \ln 2 + \ln(1 - p)}{\ln(1 - p) - \ln p} \tag{4.24}$$

Aplicando la regla de la cadena y usando (4.17) y (4.24) resulta que:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \left[-\frac{\frac{\xi}{\xi} + \ln \xi \frac{1-\xi}{1-\xi} (-1) + (-1) \ln(1-\xi)}{\ln 2} \right] \left[\frac{\ln 2}{\ln(1-p) - \ln p} \right] \tag{4.25}$$

Simplificando términos e igualando a cero se obtiene:

$$\xi = \frac{1}{2}$$

cuyo valor corresponde al siguiente valor de $\alpha(\xi)$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha\left(\xi = \frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{2}\ln p + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\ln(1-p)}{\ln 2} \\ \alpha_0 &= -\frac{\ln p + \ln(1-p)}{2 \ln 2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Reemplazando $\xi = 1/2$ en la ecuación (4.17), se obtiene el valor extremo de f_{\max} , esto es:

$$f_{\max} = f(\alpha_0) = 1 \quad (4.27)$$

Así que el máximo valor de las dimensiones fractales de los subconjuntos S_α iguala a la dimensión fractal del soporte de la medida (recuérdese que la medida está definida sobre todo el intervalo unitario). En general:

$$f_{\max}(\alpha) = D \quad (4.28)$$

El resultado no implica que este conjunto cubra el intervalo, sino más bien que S_α contiene una fracción de los puntos del intervalo. En otras palabras, este resultado significa que, si se tiene un soporte geométrico de longitud l y, si para particularizarlo se divide en partes caracterizadas por las funciones $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3), \dots$, la que verifique que $f(\alpha_0) = f_{\max}$ es igual precisamente a l .

A este punto es importante establecer la siguiente definición (Falconer, 1990):

Definición 4.1:

Una función $f: X \rightarrow Y$ es llamada función de Lipschilt-Hölder del exponente α si:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Para alguna constante c .

avanzando más en este sentido, Stiasnie (1997) expresa que $f(\alpha)$ es una función de distribución multifractal y que su punto más importante en la curva de $f(\alpha)$ es su máximo α_0 donde $f(\alpha_0) = 1$; y siendo $\alpha_0 \in (0,1)$ su valor más probable, conocido como el exponente de Lipschilt-Hölder.

Otra importante propiedad de la curva $f(\alpha)$ se da cuando $\xi = p$; en esta situación, de la expresión (4.25) se tiene:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1$$

En cuyo caso la curva $f(\alpha)$ vale:

$$f(\alpha) = f(\alpha_k) = k \tag{4.29}$$

donde:

$$k = -\frac{p \ln p + (1 - p) \ln(1 - p)}{\ln 2} \tag{4.30}$$

Así que una línea que pasa por el origen es tangente a la curva $f(\alpha)$ en $\alpha = \alpha_k$.

La dimensión fractal del conjunto S_{α_k} es k , la cual la identificaremos como la entropía del proceso multiplicativo binomial.

5. COMPORTAMIENTO MULTIFRACTAL DE MANCHAS VISCO- SAS EN MEDIOS POROSOS

Aquí se expone, a modo de aplicación de la teoría previamente desarrollada, un nuevo enfoque al importante problema, hasta ahora no bien resuelto, del comportamiento de las manchas viscosas que ocurren en el desplazamiento de un fluido¹⁵ de un medio poroso con alta viscosidad a otro fluido con baja viscosidad.¹⁶

Para una mejor comprensión del fenómeno, a continuación primero se exponen brevemente los puntos más sobresalientes del enfoque tradicional que se le ha venido dando al mismo.

5.1 Teoría de las manchas viscosas

El flujo del perfil aerodinámico de un fluido (como el agua) en torno a varios objetos se analiza añadiéndole algún tinte y colocándolo en una celda como la mostrada en la Fig. 5.1, conocida como la celda Hele-Shaw. En esencia, esta simplemente consiste en dos planos transparentes separados entre sí por una distancia b .

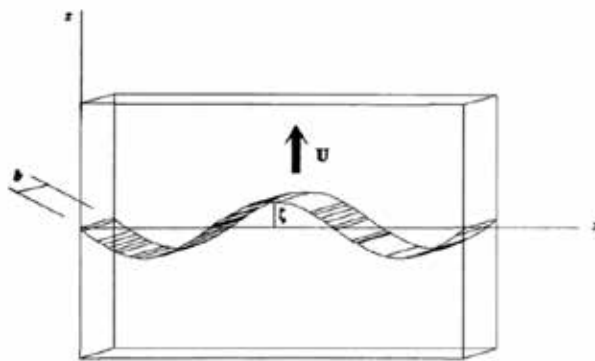


Figura 5.1. La celda Hele-Shaw.
Fuente: Imagen tomada de Feder (1988).

¹⁵ Dícese del cuerpo cuyas moléculas, debido a la pequeña fuerza de cohesión, lo hacen capaz de adoptar la forma del recipiente que los contiene.

¹⁶ Se da el nombre de viscosidad al fenómeno que pone de manifiesto las fuerzas de rozamiento entre las capas de un fluido que se mueve paralelamente una de otra con velocidades de distinta magnitud.

La ecuación para la velocidad de flujo U (deducida a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes) que gobierna el flujo en las celdas,¹⁷ es la siguiente (Feder, 1988).

$$U = -\frac{k}{\eta} \nabla(p + \rho g z) = -M \nabla \phi, \quad (5.1)$$

Aquí p es la presión, ρ la densidad y g la componente de la aceleración de gravedad a lo largo de la coordenada z de la celda; $M = k/\eta$ es la movilidad y $\phi = (p + \rho g z)$ el flujo de potencial; siendo η la viscosidad del fluido y k la permeabilidad de la celda Hele-Shaw,¹⁸ cuya dependencia b es:

$$k = \frac{b^2}{12} \quad (5.2)$$

Nótese que la velocidad en la ecuación (5.1) es la velocidad promediada sobre el espesor de la celda. Para un fluido incomprensible la ecuación de continuidad da:

$$\nabla \cdot U = -\frac{k}{\eta} \nabla^2(p + \rho g z) = 0, \quad \text{y} \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (5.3)$$

Esta es la ecuación de Laplace del flujo potencial.

Con el objeto de encontrar una solución para el flujo de velocidad se deben también especificar las condiciones de frontera (por ejemplo, una presión dada en ambos extremos de la celda y una velocidad despreciable del fluido donde este está en contacto con las paredes).

El flujo en medios porosos (por ejemplo, cuando el agua conduce aceite por un medio poroso) también sigue las ecuaciones (5.1) y (5.3), excepto que k es la permeabilidad del medio y no la expresión (5.2); y es precisamente por ello que

¹⁷ El flujo es una cantidad escalar que es numéricamente igual a la masa de flujo que pasa en la unidad de tiempo a través de una superficie plana, de área igual a la unidad, perpendicular a la dirección de transporte del fluido.

¹⁸ En este contexto, la permeabilidad debe ser entendida como la capacidad de la celda Hele-Shaw para ser atravesado por un fluido dado.

el flujo en las celdas Hele-Shaw es a menudo usado para modelar el flujo en un medio poroso. Sin embargo, hay importantes diferencias por lo que la validez de la utilización de la celda de Hele-Shaw como un modelo de flujo en un medio poroso es cuestionable. En efecto, diversos experimentos muestran que la dinámica de las manchas es notablemente diferente de lo que predice este modelo (Homsy, 1987).

Así, por ejemplo, en la Fig. 5.2 se muestran los resultados obtenidos para el desplazamiento de un fluido de alta viscosidad (epóxido) que es desplazado por el aire en un medio poroso bidimensional consistente de una única capa de esferas de vidrio comprimidas entre dos láminas de vidrio.

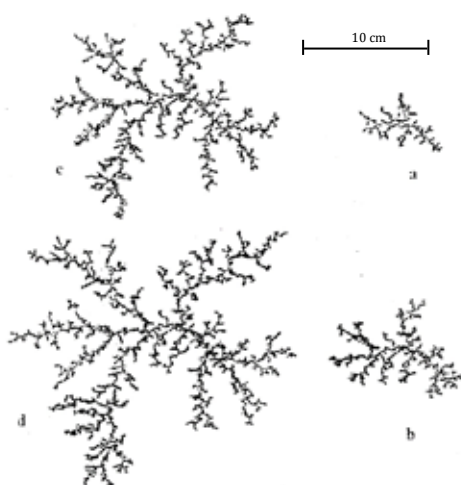


Figura 5.2. Manchas de aire (en negro) desplazando el líquido epóxido en un medio poroso bi-dimensional consistente de esferas de vidrio de 1.6 mm en una mono-capa entre dos láminas de vidrio de 40 cm de diámetro. El centro de la inyección está cerca del centro de la estructura. a) $t = 2$ s después del inicio de la inyección. b) $t = 3.9$ s. c) 19.1 s (Maloy et al., 1987).

Actualmente se atribuye a las condiciones de frontera la causa principal para que haya diferencias entre la celda Hele-Shaw y la celda contenida en un medio poroso. En concreto, en la celda Hele-Shaw la separación laminar b , determinada por las fuerzas capilares,¹⁹ es la única escala de longitud en el problema, aparte del diámetro de la celda circular (Homsy, 1987).

¹⁹ Fuerzas capilares son aquellas fuerzas atractivas presentes entre sólidos y líquidos que se encuentran en contacto.

En un medio poroso bi-dimensional, es decir en una celda circular con una única capa aleatoria de esferas de cristal, el tamaño de los poros típicos es también b , y por lo tanto el problema de flujo del fluido es controlado por la escala de longitud microscópica en todas las direcciones del espacio. Por ende, el promedio de la velocidad de flujo del fluido U está necesariamente dado por la ley de Darcy la misma que se expresa mediante la ecuación (5.1) (ecuación de Darcy) en la que la condición de incompresibilidad dada por la ecuación (5.3) también se aplica, de modo que la ecuación de Laplace resulta para la presión $p(r)$.

De lo dicho se concluye que la dinámica del frente es por lo tanto enteramente diferente a lo deducido a partir de la celda Hele- Shaw, en la que en definitiva se reduce al uso de una distribución de presión que satisface las condiciones de frontera en las dos láminas.

Por otra parte, debe tenerse presente que al aplicar la ecuación de Laplace (5.3), la decisión para desplazar el fluido desde un poro dado en la interface no se realiza en base al valor absoluto de la diferencia de presión entre el aire y el fluido, sino más bien en base al valor de la presión relativa a la presión capilar asociada con el cuello del poro que conduce a aquel poro, ya que es más difícil para el aire entrar a un poro estrecho. Este último paso introduce aleatoriedad en el problema ya que el ancho del cuello del poro es casual con alguna distribución de tamaños.

De esto se desprende que la dinámica de las manchas viscosas en medios porosos tiene dos componentes principales: la distribución de presión global controlada por la ecuación de Darcy; y, consiguientemente, por la ecuación de Laplace y por las fluctuaciones locales en la geometría de los poros.

Por otro lado, resultados obtenidos por algunos investigadores como los obtenidos por Chen y Wilkinson (1985) o Homsy (1987), a través de experimentos y simulaciones, muestran que la aleatoriedad en la estructura de los poros es un requerimiento indispensable para la fractalidad de las manchas.

Para caracterizar la distribución de las manchas se debe empezar midiendo la masa m_i de las islas en crecimiento, entonces numerando las islas en forma arbitraria con el índice $i = 1, 2, \dots, N_p$, donde N_p es el número de zonas en las cuales se observa crecimiento; se puede obtener la masa total de las islas $m_0 = \sum_i^N m_i$ y la masa normalizada μ :

$$\mu_i = \frac{m_i}{\sum m_i} = \frac{m_i}{m_0}$$

Entonces, el conjunto $\mathcal{M} = \{\mu_i\}$ caracteriza el crecimiento observado de la estructura. Este conjunto representa los incrementos en la medida del nuevo-crecimiento $M_{\mathcal{M}}$ a la resolución del experimento.

5.2 El conjunto fractal de las zonas en crecimiento

consideremos el conjunto de puntos \mathcal{N} , que tienen $\mu_i > 0$, como aquel en que se observa crecimiento; es decir, el conjunto de poros sobre los cuales ha ocurrido un crecimiento adicional de la mancha viscosa; así, el conjunto \mathcal{N} puede ser visualizado como la interface de crecimiento anterior – crecimiento nuevo.

Sea N_l el número de puntos en \mathcal{N} , los que aumentan al incrementarse el tamaño de las manchas viscosas. Para una estructura fractal esperaríamos que N_l esté dado por:

$$N_l = \alpha \left(\frac{R_g}{\delta} \right)^{D_l} \quad (5.4)$$

Aquí D_l es la dimensión de la interfaz en crecimiento, δ es el tamaño del pixel al cual la estructura es analizada y R_g es el radio de giro. Igualmente se podría también haber usado la mancha de mayor longitud en lugar del radio de giro R_g , ya que estas longitudes son proporcionales dentro de las incertidumbres experimentales.

La ecuación (5.4) da un incremento en N_l a medida que aumenta el tamaño de la estructura de la mancha; y decrece N_l , a medida que el pixel δ aumenta (o sea disminuyendo la resolución a la cual el conjunto de puntos \mathcal{N} se analiza).

En base a lo expuesto se deduce que la dimensión fractal D_l puede ser determinada contando N_l mediante la obtención de una secuencia de fotografías y luego graficando el $\log N_l$ en función del correspondiente logaritmo del radio de giro R_g .

La dimensión del conteo de cajas del conjunto de puntos \mathcal{N} , a un radio de giro dado, se debe obtener cambiando el tamaño δ de la caja. Así que ajustando la ecuación (5.4) al conteo de cajas observadas, es posible hacer una estimación de la dimensión fractal para la interface crecimiento anterior-crecimiento nuevo.

5.3 La curva $f(\alpha)$

Hasta aquí se ha discutido solamente el conjunto de puntos para el cual $\mu_i > 0$.

Ahora se puede especificar un subconjunto \mathcal{N}_μ , consistente de todas las zonas en crecimientos para los cuales $\mu \leq \mu_i \leq \mu + \Delta\mu$.

Si se especifica la medida en forma de una escala-independiente, se puede encontrar que tales subconjuntos son conjuntos fractales, para ello especifiquemos subconjuntos constituidos por las zonas de crecimiento mediante el exponente de Lipschitz – Hölder α . (Nakayama & Yakubo, 2003):

$$\mu = \left(\frac{\delta}{R_g} \right)^\alpha \quad (5.5)$$

Esta relación simplemente da una definición de α :

$$\alpha = \frac{\ln \mu}{\ln(\delta/R_g)} \quad (5.6)$$

Entonces, escogiendo α en el rango de α a $\alpha + \Delta\alpha$ se encuentra, mediante la ecuación (5.5), que a la resolución δ el correspondiente rango de μ_i tiene un radio de giro R_g . El conjunto de las zonas en crecimiento que tiene islas que dan μ_i en el rango especificado forman un conjunto de puntos N_α . Por lo tanto, el conjunto de todas las zonas en crecimiento puede escribirse como la unión de tales conjuntos:

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\alpha} N_\alpha \quad (5.7)$$

Si N_α es un conjunto fractal, entonces se debe esperar que el número de puntos en el conjunto N_α satisfagan una relación de homotecia similar a la ecuación (5.4), esto es:

$$N_\alpha = \Delta\alpha\rho_\alpha = \Delta\alpha b_\alpha \left(\frac{R_g}{\delta} \right)^{f(\alpha)} \quad (5.8)$$

El número de puntos en el conjunto es proporcional al rango $\Delta\alpha$, por lo que se ha introducido la densidad ρ_α que es independiente de este rango.

En estas circunstancias nuevamente se tiene que hacer hincapié en que los conjuntos finitos de puntos, que necesariamente tienen que tomarse en cuenta cuando se trata con resultados experimentales, solo representan muestras del conjunto fractal S_α , los cuales se definen solamente en el límite asintótico de los sistemas infinitos o de resolución infinita.

La determinación de la función $f(\alpha)$ puede hacerse usando los valores de μ_i : primero nótese la factibilidad de encontrar el valor máximo de $f(\alpha)$ usando el hecho de que el número total de zonas en crecimientos está dado por:

$$N_I = \int \rho(\alpha) d\alpha \quad (5.9)$$

que, a su vez puede escribirse de manera diferente combinándola con las ecuaciones (5.4) y (5.8)

$$\alpha \left(\frac{R_g}{\delta}\right)^{D_I} = \int b_\alpha \left(\frac{R_g}{\delta}\right)^{f(\alpha)} d\alpha \quad (5.10)$$

Esta relación es válida para un rango grande en R_g y δ , si el integrando tiene un máximo agudo a algún valor α_0 . Si este es el caso, podemos evaluar la integral y encontrar que:

$$f(\alpha_0) = D_I \quad (5.11)$$

La amplitud a depende de la forma funcional de b_α y $f(\alpha)$, y no es posible hallar una solución analítica general.

Nótese también que ya que los conjuntos N_α son subconjuntos del conjunto de las zonas en crecimiento, se tiene la siguiente relación:

$$0 \leq f(\alpha) \leq D_I \quad (5.12)$$

La cual es consistente con la ecuación (5.11).

De aquí que conociendo los valores de $\{\mu_i\}$ y usando la ecuación (5.8) se puede construir la curva $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\rho(\alpha) - \ln b_0)}{\ln(R_g/\delta)} \quad (5.13)$$

En función de α dada por la ecuación (5.6)

El parámetro b_0 representa la parte de la escala-independiente de la integral de la ecuación (5.10), y se deberá escoger de modo que el máximo valor de $f(\alpha)$ sea D_r .

Nótese que b_α puede, en principio, depender fuertemente de α , por lo tanto, usando b_0 en lugar de b_α en la ecuación (5.13) implica que se tenga un exponente efectivo $f(\alpha)$.

BIBLIOGRAFÍA

- Alegría, P. (2018). *Apuntes de teoría de la medida* (Vol. 2). Bilbao, España: Universidad del País Vasco.
- Benzi, R., Paladin, G., Parisi, G., & Vulpiani, A. (1984). On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*(17), 3521-3531.
- Bernal González, L., Calderón Moreno, M. C., & Prado Bassas, J. A. (2015). The set of space-filling curves: topological and algebraic structure. *Linear Algebra Appl.*, 467, 57-74.
- Cardona, L. F., & Múnera, L. E. (2016). Self-similarity of space filling curves. *Ingeniería y competitividad*, 18(2), 113-124.
- Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry*. West Sussex: John Wiley y Sons.
- Feder, J. (1988). *Fractals*. Oslo, Norway: Springer US.
- Frisch, U., Afonso, M. M., Mazzino, A., & Yakhot, V. (2008). Does multifractal theory of turbulence have logarithms in the scaling relations? *Journal Fluid Mech.*, 7.
- Gallardo Garcisi, M. (2017). *Evolución. El curso de la vida*. Valdivia, Chile: Editorial Médica Panamericana.
- Grassberger, P., & Procaccia, I. (1 de 10 de 1983). Measuring the strangeness of strange attractors. (North-Holland, Ed.) *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 189-208.

- Gunther, S. (2017, June 11). *14 amazing fractals found in nature*. Retrieved from <https://www.mnn.com/earthmatters/wilderness-resources/blogs/14-amazing-fractalsfound-in-nature>
- Guzmán, C. (2006). *Trabajo MA41B: vida y obra de Georg Cantor*. Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Matemática. Santiago: Universidad de Chile.
- Homsy, G. M. (1987). Viscous fingering in porous media. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19, 271-311.
- Johnson, D. M. (2002). Commentary on Menger's work on dimension theory. In K. Menger, *Selecta Mathematica* (Vol. 1, pp. 23-32). Vienna: Springer-Verlag Wien.
- Juventeny, A. (2016). *Introducción a la dimensión de Hausdorff*. Departamento de matemática aplicada y análisis. Barcelona: Universitat de Barcelona.
- Lapidus, M. L., Rock, J. K., & Žubrinić, D. (2012). Box-counting fractal strings, zeta functions, and equivalent forms of Minkowski dimension. *arXiv preprint arXiv*, 1207.6681.
- Larraz Mora, R. (2002). La dimensión de Hausdorff-Besicovitch en el diseño de la banda de rodadura de neumáticos. *Revista Internaional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 18(1), 19-30.
- Lovenjoy, S. a. (2007). *The Weather and Climate: Emergent Laws and Multifractal Cascades*. New York: Cambridge University Press.
- Måløy, K. J., Boger, F., Feder, J., & Jøssang, T. (1987). *Dynamics and Structure of Viscous Fingers in Porous Media*. Oslo, Norway: Springer US.

- Mandelbrot, B. (1996). *Los objetos fractales*. Barcelona, España: Tusquets.
- Mandelbrot, B. B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman and Company.
- Mandelbrot, B. B. (1986). *Fractal Measures (Their Infinite Moment Sequences and Dimensions) and Multiplicative Chaos: Early Works and Open Problems* (Vol. 32). Berlin, Germany: Springer.
- Montero Pascual, M. E. (2003). *Aplicación de técnicas de análisis multifractal a distribuciones de tamaño-volumen de partículas de suelo obtenidas mediante análisis por difracción de láser*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- Nakayama, T., & Yakubo, K. (2003). *Fractal concepts in condensed*. Berlin, Germany: Springer.
- Petrakis, I. (2010). *Brouwer's fan theorem*. Thessaloniki, Greece: Aristotle University of Thessaloniki.
- Rey Simó, J. M. (1995, Mayo). Geometría de medidas y conjuntos autosemejantes (Tesis de Doctorado). *Tesis doctoral*. Madrid, España: Universidad Complutense.
- Rodriguez-Iturbe, I., & Rinaldo, A. (1997). *Fractal river basins: chance and self-organization*. Cambridge, United Kingdom: The press syndicate of the University of Cambridge.
- Rubiano, G. N. (2002). *Topología general* (Segunda ed.). Bogotá, Colombia: Sociedad Colombiana de Matemáticas.

Salvadori, G. (2004). *I Frattali cosa sono*. Pavia, Italia: Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica, Università degli Studi di Pavia.

Sánchez, N., Alfaro, E. J., & Pérez, E. (2005). The fractal dimension of projected clouds. *The astrophysical journal*, 849-856.

Schertzer, D., Lovejoy, S., & Hubert, P. (2002). An introduction to stochastic multifractal fields. *ISFMA Symposium on Environmental Science and Engineering with related Mathematical Problems*, 106-179.

Stiassnie, M. (1997). A look at fractal functions through their fractional derivatives. *Fractals*, 561-564.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Codimensión fractal.....	42
Conjunto fractal en las zonas de crecimiento.....	76
Conjunto triádico de Cantor.....	55
Curva triádica de Koch.....	52
Definición de fractal.....	14
Dimensión de Hausdorff.....	23
Dimensión de similaridad.....	49
Dimensión topológica.....	26
Escalera del diablo.....	60
Exponente de Lipschitz – Hölder.....	67
Intersección de fractales.....	42
Manchas viscosas.....	74
Medida de Hausdorff.....	30
Medidas multifractales.....	58
Multifractales.....	58
Producto de fractales.....	47
Propiedades de la dimensión de Hausdorff	36
Proyección de fractales.....	45
Propiedades de la medida s -dimensional de Hausdorff.....	32
Recubrimientos de Cantor – Minkowski.....	26

SIMBOLOGÍA

\mathbb{R}^n	espacio euclideo $n - \text{dimensional}$
$\sum_{i=1}^n$	sumatoria desde $i = 1, \dots, n$
$B_\delta(x_\alpha)$	recubrimiento de Cantor - Minkowski
S_δ	conjunto suave
$d(x, y)$	distancia entre dos puntos
$\cup_{i=1}^n$	unión de conjuntos desde $i = 1, \dots, n$
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$	elemento de \mathbb{R}^n
$\text{diam}(A)$	diámetro del conjunto A
H_δ^s	medida de Hausdorff
$H^s(A)$	medida s -dimensional de Hausdorff
(X, τ)	espacio topológico
$D(A)$	dimensión de <i>Hausdorff-Besicovitch</i>
$\text{dim}_F(A)$	dimensión fractal del conjunto A
$\text{cod}_F(A)$	codimensión fractal del conjunto A
$N_\delta(F)$	hipercubos de lado δ que cubren F
$\alpha(q)$	exponente de Lipschitz - Hölder
R_g	radio de giro

Los objetivos principales de esta publicación se enmarcan en establecer y analizar matemáticamente algunos comportamientos multifractales, con la finalidad de mostrar la validez de estas técnicas, y a la vez de indicar su utilidad práctica. Se pretende aplicar la teoría desarrollada al importante problema de las manchas viscosas que se producen en medios porosos.

En cuanto a la hipótesis sobre la que se sustenta esta obra cabe indicar que esta se basa en que una medida multifractal puede representarse en términos de las medidas de subconjuntos fractales inter-relacionados con diferentes exponentes de homotecia. Por lo tanto, los sistemas físicos, que presenten propiedades de multifractalidad, pueden ser tratados con un enfoque congruente con tales propiedades.

Jaime Giovanni Béjar Suárez es un investigador y profesor en la Facultad de Ciencias de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Se formó a nivel de pregrado en la carrera de doctorado en Química, especialidad Físico Química. Ha realizado varias publicaciones relacionadas a la teoría del caos y a los fractales.

Mayra Elizabeth Cáceres Mena es doctora y magíster en Matemática, docente investigadora de la Facultad de Recursos Naturales de la ESPOCH. Con 15 años de experiencia profesional, es autora de varios artículos en revistas científicas de alto impacto y de varios libros de matemática. Sus estudios se han enfocado a la geometría fractal o geometría de la naturaleza.

Galo Briam Montenegro Córdova es Jefe del Laboratorio de Química, Coordinador del grupo de investigación de Química Agrícola de la Facultad de Recursos Naturales de la ESPOCH.

Catalina Margarita Verdugo Bernal es ingeniera en Ecoturismo, Magister en Diseño, Gestión y Dirección de Proyectos, Magister en Turismo Sostenible y Desarrollo local. Ha publicado 15 artículos en diversos temas de sostenibilidad y académicos.

Carla Sofía Arguello Guadalupe es ingeniera en ecoturismo, Msc en Economía Agraria especialización recursos naturales y medio ambiente, con Diplomado Superior en Docencia con el Empleo de las TIC. Ha publicado 10 artículos en diversos temas tanto económicos como académicos.

ISBN: 978-9942-35-511-9

